Vollständiger Lehrkurs

der

reinen Mathematik

von

L. B. Francoeur,

Professor der Mathematik an der Universität zu Paris, Mitgliede der philomatischen Gesellschaft, Ritter der Ehrenlegion u. s. w.

Nach der neuesten verbesserten und vermehrten Original-Ausgabe aus dem Französischen übersetzt, mit Anmerkungen und Zusätzen versehen

von

Dr. Edmund Külp,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höhern Gewerbschule in Darmstadt.

Zweiten Bandes viertes Buch,

enthaltend

Die Variations- und Differenzenrechnung.

Mit einer Kupfertafel.

(Schluß des Gesammt-Werkes.)

Bern, Chur und Leipzig.

Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1846.

Haller'sche Buchdruckerei in Bern.

Inhalt.

Zweiten Bandes viertes Buch.

(Die Variations- und Differenzenrechnung.)

Erstes Kapitel.

Variationsrechnung.

Seite.

Variation der Urfunktionen und Differentialausdrücke 1

Variation der Integralformeln 10

Anwendung der Variationsrechnung bei der Bestimmung des Größten und Kleinsten 20

Aufgaben über Maxima und Minima unbestimmter Integralformeln . 29

Zweites Kapitel.

Direkte Differenzenrechnung.

Von den Differenzen der Funktionen einer Variabeln 43

Von den Differenzen der Funktionen mehrerer Veränderlichen . . . 53

Interpolation der Reihen 59

Analogie der Differenzen mit den Potenzen 72

Drittes Kapitel.

Inverse Differenzenrechnung.

Seite.
Vom Summiren expliciter Funktionen von einer einzigen Veränderlichen 77
Summation der Reihen 92
Vom Summiren implicitter Funktionen von einer Veränderlichen . 101
Ueber die Natur der durch die endliche Integration eingeführten Constanten 109
Vom Summiren der Funktionen von zwei Veränderlichen 112
Anwendung der inversen Differenzenrechnung auf verschiedene Aufgaben 122

Viertes Kapitel.

Rechnung mit gemischten Differenzen.

Von den Gleichungen mit gemischten Differenzen 131
Anwendung der Gleichungen mit gemischten Differenzen auf geometrische Probleme 133
Noten 143

Erstes Kapitel.

Variationsrechnung.

Variation der Urfunktionen und Differentialausdrücke.

§. 1. Die isoperimetrischen Aufgaben, d. h. diejenigen Aufgaben, bei denen man nur solche krumme Linien betrachtet, welche gleichen Umfang haben, waren schon von verschiedenen Mathematikern vor der Entdeckung der Variationsrechnung gelöst. Die dabei in Anwendung gebrachten Erfahrungsarten bildeten jedoch keine eigentliche Methode; denn man löste jede einzelne Aufgabe blos durch eine auf den fraglichen Fall gerade passende Weise, wobei man öfters seine Zuflucht zu sehr fern liegenden analytischen Kunstgriffen nahm. Dem berühmten Lagrange war es vorbehalten, durch seine Entdeckung der Variationsrechnung alle derartigen Aufgaben auf eine und dieselbe Methode zurückzuführen. Um gehörig einzusehen, worin das Wesen der neuen Rechnungsart besteht, sei die Funktion

$$V = F(x, y, p, q \ldots)$$

gegeben, wo $p, q, \ldots$ die Differentialcoefficienten von y in Bezug auf x sind, und wo zwischen diesen beiden Veränderlichen eine gewisse Relation stattfindet, die durch $y = \varphi x$ ausgedrückt sein mag. Man kann nun der Funktion V verschiedene Eigenschaften beilegen, z. B. sie zu einem Maximum oder Minimum machen. Ist jetzt $y = \varphi x$ bekannt, so lassen sich daraus die Werthe von $y, p, q \ldots$ herleiten, durch deren Substitution der Ausdruck V in eine Funktion fx von x übergeht. Mit Hülfe der gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung lassen sich dann die Werthe von x finden, durch welche fx zu einem Maximum oder Minimum wird. Auf solche Art bestimmt

man für eine gegebene Curve $y=\varphi x$ die Punkte, für die unsere vorgelegte Funktion V ein Maximum oder Minimum wird, welche Eigenschaft den übrigen Curvenpunkten nicht zukommt.

Anders verhält sich aber die Sache, wenn $y=\varphi x$ unbekannt ist und man für dasselbe verschiedene Formen annimmt. Die Funktion V wird dann ebenfalls verschiedene Formen in x erhalten, und man kann fragen, welche Relation zwischen x und y muß man unter allen möglichen wählen, damit unsere vorgelegte Funktion V, die eine sämmtlichen Curven $y=\varphi x$ gemeinschaftliche Eigenschaft ausdrückt, ein Größtes oder Kleinstes werde. Diese zweite Aufgabe, in welcher die Veränderlichen x und y nicht von einander unabhängig sind, obschon die zwischen ihnen bestehende Relation unbekannt ist, gehört nun dem Variationscalcül an, der sich übrigens keineswegs auf eine bloße Theorie der Maxima und Minima beschränkt.

Anmerkung. Der Variationscalcül unterscheidet sich hiernach wesentlich von dem Differentialcalcül. In dem letztern nämlich bleibt der eigentliche Charakter der Funktion, d. h. die zwischen den Veränderlichen bestehende Verknüpfung unverändert, nur die Werthe der in derselben vorkommenden Variabeln läßt man in andere Werthe übergehen und untersucht die daraus folgenden Ergebnisse. In dem Variationscalcül dagegen sieht man diese Funktion, d. h. die zwischen den Veränderlichen stattfindende Verbindung als veränderlich an, läßt mithin Funktionen in Funktionen übergehen und untersucht die aus einem solchen Verfahren folgenden Ergebnisse. In den analytischen Gegenständen, welche des Variationscalcüls bedürfen, ist die Relation zwischen den dabei vorkommenden Variabeln unbestimmt, und die Ausmittelung dieser Relation ist gerade in den meisten Fällen der Zweck der Variationsrechnung.

§. 2. Man nennt die bei dem Uebergange einer Funktion in eine andere erzeugte, unendlich klein werdende Aenderung der ursprünglichen Funktion ihre Variation und bezeichnet sie durch den der Funktion vorgesetzten griechischen Buchstaben δ. Ist z. B. $y=Fx$ die Ordinate PM (Fig. 1) einer Curve BC, so wird, wenn man von der letztern auf die ihr unendlich nahe liegende Curve bc übergeht, Mm die Variation δy von y sein. Gleichwie das Zeichen d beim

Uebergange von einem Punkte M zum nächstfolgenden M′ auf der nämlichen Curve angewandt wird, ebenso bedient man sich des Zeichens δ, wenn es sich darum handelt, um von einem Punkte M einer Curve BC zu einem Punkte in der nächstfolgenden Curve bc fortzuschreiten. Da hiernach die Variation δy nichts anders als ein Differential von y ist, nur unter einem andern Gesichtspunkt betrachtet; so findet man die Variation von V irgend einer Funktion in y, welches wieder eine Funktion von x ist, offenbar mittelst derselben Rechnungsoperationen, mittelst derer man das Differential von V erhält, nur wird dabei das Differentialzeichen d mit dem Variationszeichen δ vertauscht. Die aus einer Veränderung der Relation zwischen x und y entstandene Variation der Funktion V von y ist demnach $\delta V = \frac{dV}{dy}\delta y$. Ebenso wird, wenn V eine Funktion von y und z ist, deren jede wieder von x abhängt, und y und z durch Aenderung ihrer Relationen mit x die Variationen δy und δz erhalten, die Variation von V sein:

$$\delta V = \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dz}\delta z.$$

§. 3. Wenn sich ein Körper von gegebener Form bewegt, so kann man entweder die verschiedenen Punkte in einer seiner Lagen unter sich vergleichen oder auch die verschiedenen Orte, welche ein bestimmter Punkt des Körpers in den auf einander folgenden Lagen desselben einnimmt, in Betrachtung ziehen. Für den ersten Fall, in welchem man den Körper als unbeweglich ansieht, behält man das Zeichen d bei, welches sich auf die Aenderungen der Coordinaten seiner Oberfläche bezieht. Für den zweiten Fall, wo Variationen ganz unabhängig von den erstern Aenderungen ausgedrückt werden sollen und die Coordinaten den Bedingungen der vorgeschriebenen Bewegung gemäß variiren, wollen wir uns der Bezeichnung δ bedienen. Wird mithin eine feste oder bewegliche Curve stets in einer ihrer Lagen betrachtet, so bezeichnen dx, dy . . . eine Vergleichung zwischen ihren Coordinaten. Um aber die verschiedenen Orte anzuzeigen, welche ein und derselbe Punkt einer hinsichtlich ihrer Form nach einem gewissen Gesetze veränderlichen Curve annehmen kann, werden wir δx, δy . . . schreiben, welche Ausdrücke die unter diesem

Gesichtspunkte betrachteten Zunahmen andeuten. Ebenso wächst dy, wenn es in $d(y+\delta y)$ übergeht, um $d\delta y$, und d^2y um $d^2\delta y$, u. s. w.

Anmerkung. Man wird hieraus leicht entnehmen, welche wichtige Anwendungen die Variationsrechnung auf Gegenstände der Mechanik gestattet, was schon Lagrange mit dem glücklichsten Erfolge that. Man lese hierüber:

1. Analytische Mathematik von Lagrange, übersetzt von F. W. A. Murhard. Göttingen, bei Vandenhoeck und Ruprecht.
2. Poisson's Lehrbuch der Mathematik, übersetzt von M. v. Stern. Berlin, bei Reimer.

§. 4. Um die Sache in größerer Allgemeinheit zu nehmen, läßt man x nicht minder variiren als y. Man kann sich hier ohne weiteres vorstellen, daß die beiden Variationen δx, δy an kein Gesetz gebunden und auf keinerlei Weise von einander abhängig seien. Obschon die einer der beiden Veränderlichen beigelegten Variationen alle möglichen Variationen umfassen, welche die zwischen den beiden Veränderlichen festgestellte Relation erleiden kann; so wird doch, bei sorgfältiger Erwägung der Umstände, eine solche Einführung der doppelten Variationen nichts weniger als überflüssig erscheinen, wie wir dies an folgendem, aus der Geometrie entlehnten, Beispiele sehen werden. Handelt es sich nämlich darum, unter allen Linien, welche von einer gegebenen Curve AB (Fig. 2) zu einer andern gegebenen Curve CD gezogen werden können, diejenige Linie GYM zu bestimmen, welche die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums besitzt; so muß man dieselbe Eigenschaft auf irgend eine andere nächstfolgende Curve übertragen, mithin für die Endpunkte G und M der gesuchten Curve, sowohl die Abscisse als Ordinate variiren lassen. Um daher von den Variationen auf die der Endpunkte der fraglichen Curve übergehen zu können, ist es nothwendig, sowohl den einzelnen Abscissen AX als auch den Ordinaten XY beliebige Variationen in der Rechnung anzuweisen.

Im Falle man zwei Gleichungen zwischen drei Veränderlichen x, y, z hat, wonach sich zwei, y und z als Funktionen der dritten x ansehen lassen, stellen jene Gleichungen im Allgemeinen eine doppelt gekrümmte Curve dar. Bei dem Uebergange von einer solchen Curve zu irgend einer andern nächstliegenden können nun entweder alle drei

Coordinaten, oder nur zwei, oder nur eine variiren. Wäre jetzt hinsichtlich dergleichen Curven abermals die Frage vorgelegt, unter allen, welche man zwischen irgend zwei gegebenen Flächen ziehen kann, diejenige zu bestimmen, welche die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums besitzt; so muß man in der Rechnung alle drei Coordinaten variiren lassen, damit man die Variationen an den Endpunkten der gesuchten Curve auf die Grenzflächen beziehen könne.

Hat man endlich nur eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y, z, in welchem Falle diese Gleichung eine Fläche ausdrückt; so können, wenn man von einem Punkte der Fläche zu einem Punkte irgend einer nächstgelegenen Fläche übergeht, entweder eine, oder zwei, oder alle drei Coordinaten variiren. Um dergleichen Untersuchungen in der gehörigen Allgemeinheit anzustellen, ist es zweckgemäß, sofort den einzelnen Coordinaten ihre besonderen Variationen beizulegen. Denn hätte man z. B. unter allen Flächen, welche an gegebenen Flächen endigen, diejenige zu finden, welche die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums besitzt; so müßte man wieder dieselbe Eigenschaft auf irgend eine nächstliegende Fläche übertragen. Es ist daher wieder nothwendig, von vornherein in der Rechnung den drei Coordinaten ihre eigenthümlichen Variationen anzuweisen, damit man dieselben ebenfalls auf die Grenzflächen ausdehnen kann.

Die Variationsrechnung ist demnach, um uns der Worte des großen Euler zu bedienen, die Methode, die Aenderung oder Variation aufzufinden, welche ein aus beliebig vielen Veränderlichen zusammengesetzter Ausdruck erfährt, wenn man entweder alle, oder nur einige Veränderlichen darin variiren läßt. Da hier die Rechnung, wie schon gesagt, es vorzugsweise mit dem Aufsuchen der zwischen den Veränderlichen bestehenden Relationen, welche gewisse Bedingungen erfüllen sollen, zu thun hat; so kann der Calcul eine derartige Relation eigentlich gar nicht berücksichtigen, insofern sie noch unbekannt ist, vielmehr muß die Rechnung so geführt werden, als wären die Veränderlichen durchaus von einander unabhängig.

§. 5. Wenn man in V, welches eine bestimmte Funktion von x und y ist, $y + dy$ statt y und $x + dx$ statt x setzt; so wird V in $V + dV$ übergehen. Nimmt man die Variation von dieser letztern Größe und addirt sie zu der Größe selbst, so bekommt man

$$V + \delta V + dV + \delta dV.$$

Offenbar wird man aber dasselbe Resultat erhalten, wenn man vorerst $x+\delta x$ und $y+\delta y$ statt x und y in V schreibt, und dann den dadurch hervorgegangenen Werth $V+\delta V$ um sein Differential $dV+d\delta V$ vermehrt. Man wird demnach haben:

$$V+\delta V+dV+\delta dV=V+\delta V+dV+d\delta V, \text{ woraus}$$
$$\delta dV=d\delta V.$$

Wenn folglich eine Größe hintereinander den Operationen des Differentirens und Variirens unterworfen werden soll, so hat es auf das Resultat der Rechnung keinen Einfluß, in welcher Ordnung man diese Operationen vornimmt. Aus der eben gefundenen Gleichung ergibt sich:

$$\delta d^2V=d\delta dV=d^2\delta V$$

und wenn man dies so weiter fortsetzt, ganz allgemein

$$\delta d^nV=d^n\delta V.$$

Von dem Satze $\delta dV=d\delta V$ kann man sich augenscheinlich überzeugen, wenn man V als Ordinate PM (Fig. 13.) einer im Raume befindlichen Curve MM' ansieht, deren andere Coordinaten x und y sind; $V+dV$ wird dann als die nächstanliegende Ordinate $P'M'$ derselben Curve gelten können. Geht man von den Punkten M und M' der Curve MM' zu den entsprechenden m und m' der nächstgelegenen Curve mm' über, so hat man:

$$Pm=V+\delta V \text{ und } P'm'=V+dV+\delta(V+dV).$$

Es ist aber klar, daß die letzte Ordinate $P'm'$ auch erhalten wird, indem man von der Ordinate Pm der variirten Curve auf die nächstfolgende Ordinate derselben übergeht, d. h. man hat auch

$$P'm'=V+\delta V+d(V+\delta V).$$

Aus der Vergleichung dieser beiden Ausdrücke ergibt sich die obige Relation $\delta dV=d\delta V$.

§. 6. Ist U eine Funktion von x, y und deren Differentialen, und das gewöhnliche Differential von U von der Form:

$$dU=mdx+nd^2x+pd^3x+qd^4x+\ldots$$
$$+Mdy+Nd^2y+Pd^3y+Qd^4y+\ldots;$$

so reicht es hin, um daraus die Variation von U zu erhalten, das aus der Differentiation von U entstandene d mit δ zu vertauschen,

wodurch man erhält:

$$\delta U = m\delta x + n\delta dx + p\delta d^2x + \ldots$$
$$+ M\delta y + N\delta dy + P\delta d^2y + \text{ꝛc.}$$

Läßt sich U auf die Form Vdx bringen, wo es also blos die Veränderlichen selbst und die Differentialcoefficienten

$$\frac{dy}{dx} = p, \ \frac{dp}{dx} = q \ldots$$

enthält, und hat das Differential von V die Form:

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + \text{ꝛc.};$$

so wird die Variation von V sein:

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \text{ꝛc.}$$

Dabei kann man die Variation von p, q ... unter der Voraussetzung entwickeln, daß dx entweder constant oder veränderlich ist. Hält man den letzten Gesichtspunkt fest, so hat man für diesen Fall:

$$\left.\begin{aligned}
\delta p &= \delta \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dx\delta dy - dy\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta y - pd\delta x}{dx},\\
\delta q &= \delta \cdot \frac{dp}{dx} = \frac{dx\delta dp - dp\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta p - qd\delta x}{dx},\\
\delta r &= \delta \cdot \frac{dq}{dx} = \frac{dx\delta dq - dq\delta dx}{dx^2} = \frac{d\delta q - rd\delta x}{dx},\\
&\text{u. s. w.};
\end{aligned}\right\} \text{(a)}$$

welche Werthe in den obigen Ausdruck von δ V für δp, δq ... substituirt werden müssen.

Anmerkung. Wenn wir der Veränderlichen x keine Variation beilegen und überdies dx constant annehmen, so bekommen wir für die Variation von V folgenden Ausdruck:

$$\delta V = N\delta y + \frac{Pd\delta y}{dx} + \frac{Qd^2\delta y}{dx^2} + \text{ꝛc.}$$

§. 7. Ein Paar Beispiele mögen diese Art von Rechnung erläutern:

1. Die Variation der Subtangente $s = \frac{ydx}{dy}$ zu finden. Vermittelst der Relation $dy = pdx$ verwandelt sich dieser Ausdruck in $s = \frac{y}{p}$, dessen Variation ist: $\delta s = \frac{\delta y}{p} - y\frac{\delta p}{p^2}$. Indem man für δp

seinen in der Formel (a) enthaltenen Werth setzt, hat man:

$$\delta s = \frac{dx}{dy}\,\delta y - \frac{y dx}{dy^2} d\delta y + \frac{y}{dy} d\delta x,$$

welcher Ausdruck sich auch unmittelbar durch Differentiation der vorgelegten Formel und Vertauschung des Zeichens d mit δ ergibt.

2. Die Variation des Krümmungshalbmessers $V = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ zu bestimmen. Die Variation desselben ist:

$$\delta V = \frac{3p\delta p}{q}\sqrt{1+p^2} - \frac{\delta q}{q^2}(1+p^2)^{\frac{3}{2}},$$

worin noch die in den Formeln (a) gegebenen Werthe von δp und δq zu substituiren sind.

§. 8. Es sei V eine Funktion von x, y, z und den sich auf x und y als unabhängige Größen beziehenden partiellen Differentialcoefficienten von z. Einer bequemen Uebersicht halber bezeichnen wir die partiellen Differentialcoefficienten von der ersten Ordnung mit p, p', die der zweiten Ordnung mit q, q', q'', die der dritten Ordnung mit r, r', r'', r''' u. s. w.; wir setzen nämlich:

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = p',$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2z}{dx^2} = q, \quad \frac{dp}{dy} = \frac{dp'}{dx} = \frac{d^2z}{dxdy} = q', \quad \frac{dp'}{dy} = \frac{d^2z}{dy^2} = q'',$$

$$\frac{d^3z}{dx^3} = r, \quad \frac{d^3z}{dx^2dy} = r', \quad \frac{d^3z}{dxdy^2} = r'', \quad \frac{d^3z}{dy^3} = r''' \text{ u. s. w.}$$

Hat nun das Differential von V die Form:

$$\begin{aligned} dV = Ldx + Mdy + Ndz + Pdp &+ Qdq + Rdr \\ +P'dp' &+ Q'dq' + R'dr' \\ &+ Q''dq'' + R''dr'' \\ &+ R'''dr''' \\ &+ \text{ꝛc.}; \end{aligned}$$

so wird die gesuchte Variation folgende sein:

$$\begin{aligned} \delta V = L\delta x + M\delta y + N\delta z + P\delta p &+ Q\delta q + R\delta r \\ +P'\delta p' &+ Q'\delta q' + R'\delta r' \\ &+ Q''\delta q'' + R''\delta r'' \\ &+ R'''\delta r''' \\ &+ \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

Die Relationen $p=\frac{dz}{dx}$ und $p'=\frac{dz}{dy}$ geben uns

$$\delta p=\frac{d\delta z-pd\delta x}{dx} \text{ und } \delta p'=\frac{d\delta z-p'd\delta y}{dy}, \quad (b)$$

wo in der ersten Formel y und in der zweiten x als constant angesehen wird. Für die Variationen der Differentialcoefficienten von der zweiten Ordnung erhalten wir:

$$\delta q=\frac{d\delta p-qd\delta x}{dx},$$

$$\delta q'=\frac{d\delta p'-q'd\delta x}{dx}=\frac{d\delta p-q'd\delta y}{dy},$$

$$\delta y''=\frac{d\delta p'-q''d\delta y}{dy}.$$

Um die Differentiale $d\delta p$, $d\delta p'$ wegzuschaffen, müssen wir die oben angegebenen Werthe von δp, $\delta p'$ successive in Bezug auf x und y differentiiren, was uns gibt:

$$\frac{d\delta p}{dx}=\frac{d^2\delta z}{dx^2}-\frac{qd\delta x}{dx}-\frac{pd^2\delta x}{dx^2},$$

woraus wir, wegen $q=\frac{dp}{dx}$, folgern:

$$\delta q=\frac{d^2\delta z}{dx^2}-\frac{2qd\delta x}{dx}-\frac{pd^2\delta x}{dx^2}.$$

Auf ähnliche Art finden wir:

$$\delta q''=\frac{d^2\delta z}{dy^2}-\frac{2q''d\delta y}{dy}-\frac{p'd^2\delta y}{dy^2},$$

Desgleichen haben wir, wenn für q' sein Werth $\frac{dp}{dy}$ genommen wird:

$$\delta q'=\frac{d^2\delta z}{dxdy}-\frac{q'd\delta x}{dx}-\frac{q'd\delta y}{dy}-\frac{pd^2\delta x}{dxdy};$$

dagegen bekommen wir, wenn für q sein anderer Werth $\frac{dp}{dx}$, gebraucht wird:

$$\delta q'=\frac{d^2\delta z}{dxdy}-\frac{q'd\delta x}{dx}-\frac{q'd\delta y}{dy}-\frac{p'd^2\delta y}{dxdy}.$$

Diese beiden abweichenden Werthe von $\delta q'$ werden übereinstim-

men, wenn man die Glieder $\frac{pd^2\delta x}{dxdy}$ und $\frac{p'd^2\delta y}{dxdy}$ zum Verschwinden bringt, was dadurch geschieht, daß man die Variation δx blos von x und die Variation δy blos von y abhängig annimmt.

Anmerkung. Die Rechnung wird hier bedeutend erleichtert, wenn wir blos der Größe z Variationen anweisen und die Variabeln x und y ganz unverändert lassen, was $\delta x = \delta y = o$ liefert. Auf diese Art werden bei der Vergleichung zweier nächstliegenden Flächen nur solche Punkte in Betracht gezogen, welche die nämlichen zwei Coordinaten x und y besitzen und blos in Hinsicht der dritten Variabeln um eine beliebige Variation δz von einander verschieden sind, die als irgend eine Funktion von x und y anzusehen ist. Für die Variationen der partiellen Differentialcoefficienten von den zwei ersten Ordnungen erhalten wir unter dieser Voraussetzung folgende Formeln:

$$\delta p = \frac{d\delta z}{dx}, \quad \delta p' = \frac{d\delta z}{dy};$$

$$\delta y = \frac{d^2\delta z}{dx^2}, \quad \delta q' = \frac{d^2\delta z}{dxdy}, \quad \delta q'' = \frac{d^2\delta z}{dy^2}.$$

Variation der Integralformeln.

§. 9. Sehr wichtig ist in der Variationsrechnung die Bestimmung der Variation der Integralausdrücke $\int U$ und $\int V dx$, wo U die Veränderlichen x, y und ihre Differentiale, dagegen V blos x, y und die Differentialcoefficienten von y enthält. Obschon sich diese Integrale nicht angeben lassen, so lange y eine unbestimmte Funktion von x bleibt; so kann man doch die Variationen jener Integrale auffinden, d. h. die Aenderungen, welche die letzteren bei dem Uebergange der unbekannten Funktion y aus einem Zustaude in den nächstfolgenden erfahren. Das hauptsächlichste Mittel hierzu ist, daß man die Ordnung des Integralzeichens $\int$ und des Variationszeichens δ nach Willkühr wählen kann, gerade so wie die einem Ausdrucke vorgesetzten Differentiationszeichen d und Variationszeichen δ nach Belieben unter einander vertauscht werden können, d. h. es ist $\delta \int U = \int \delta U$. Setzt man nämlich $\int U = U_1$, so wird $U = dU_1$. Hieraus entspringt, wenn man die Variationen nimmt und dann die Zeichen d und δ unter einander verwechselt: $\delta U = d\delta U_1$. Geht man

zu den Integralen über, so kommt $\int\delta U = \delta U_1$, oder, wenn man für U_1 seinen Werth $\int U$ einführt: $\int\delta U = \delta\int U$.

Dieser Satz erstreckt sich ebenfalls auf die höheren Integrale. Denn für $U = \int W$ gibt die Gleichung

$$\int\delta U = \delta\int U \text{ uns } \int\delta\int W = \delta\int\int W,$$

oder, indem man das Zeichen $\int$ mit dem Zeichen δ vertauscht,

$$\int\int\delta W = \delta\int\int W.$$

Indem man dies so weiter fortsetzt, erhält man allgemein

$$\delta\int^n U = \int^n \delta U.$$

§. 10. Handelt es sich um die Variation der erstern Integralformel $\int U$, so braucht man, wenn das gewöhnliche Differential von U die Form hat:

$$dU = m dx + n d^2x + p d^3x + q d^4x + \text{ etc.},$$
$$+ M dy + N d^2y + P d^3y + Q d^4y + \text{ etc.},$$

blos darin das letzte d mit δ zu vertauschen, um daraus die Variation von U herzuleiten. Es entsteht hiernach wegen $\delta\int U = \int\delta U$ folgender Ausdruck:

$$\delta\int U = \int m\delta x + \int n\delta dx + \int p\delta d^2x + \int q\delta d^3x + \text{ etc.}$$
$$+ \int M\delta y + \int N\delta dy + \int P\delta d^2y + \int Q\delta d^3y + \text{ etc.},$$

welcher eine andere Gestalt erhält, wenn man in den Gliedern, in denen die Zeichen d und δ vereint vorkommen, das Zeichen δ dem Zeichen d folgen läßt und hierauf theilweise integrirt. Es ist nämlich:

$$\int n d\delta x = n\delta x - \int\delta x dn;$$
$$\int p d^2\delta x = p d\delta x - \int dp d\delta x = p d\delta x - dp\delta x + \int d^2p\delta x;$$
$$\int q d^3\delta x = q d^2\delta x - \int dq d^2\delta x = q d^2\delta x - dq d\delta x + \int d^2 q d\delta x$$
$$= q d^2\delta x - dq d\delta x + d^2q\delta x - \int d^3q\delta x, \text{ u. s. w.}$$

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$\int N d\delta y = N\delta y - \int dN\delta y,$$
$$\int P d^2\delta y = P d\delta y - dP\delta y + \int d^2P\delta y,$$
$$\int Q d^3\delta y = Q d^2\delta y - dQ d\delta y + d^2Q\delta y - \int d^3Q\delta y, \text{ u. s. w.}$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Ausdruck von $\delta\int U$, so findet man, wenn man einerseits die Glieder, welche von dem Integralzeichen befreit sind, andererseits die Glieder vereinigt, in denen dieses Zeichen noch vorkommt, folgendes Resultat:

$$\left.\begin{aligned}\delta\int U = &\ (n - dp + d^2q - \text{ꝛc.})\,\delta x \\ &+ (p - dq + \text{ꝛc.})\,d\delta x \\ &+ (q - \text{ꝛc.})\ d^2\delta x + \text{ꝛc} \\ &+ (N - dP + d^2Q - \text{ꝛc.})\,\delta y \\ &+ (P - dQ + \text{ꝛc.})\ d\delta y \\ &+ (Q - \text{ꝛc.})\ d^2\delta y + \text{ꝛc.} \\ &+ \int(m - dn + d^2p - d^3q + \text{ꝛc.})\,\delta x \\ &+ \int(M - dN + d^2P - d^3Q + \text{ꝛc.})\,\delta y + K,\end{aligned}\right\}\ (c)$$

wo K die willkührliche Constante darstellt. Kommt in U noch die Veränderliche z mit ihren Differentialen vor, so muß man, um die Variation von $\int U$ zu erhalten, für diese Veränderliche ähnliche Glieder einführen, wie die Variabeln x und y sie dargeboten haben.

Anmerkung. Bestehen die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} m - dn + d^2p - d^3q + \text{ꝛc.} = 0 \\ M - dN + d^2P - d^3Q + \text{ꝛc.} = 0,\end{aligned}\right\}\ (d)$$

so wird die Variation $\int\delta U$ von jedem Integralzeichen befreit sein. Diese Relationen sind aber gerade die Bedingungsgleichungen für die Integrabilität von U, was sich folgendermaßen nachweisen läßt. Ist nämlich U das genaue Differential von U_1, d. h. $U = dU_1$; so ist $\delta U = \delta dU_1 = d\delta U_1$ folglich δU ebenfalls ein genaues Differential von $d\delta U_1$. Sind daher in dem Ausdrucke $\int\delta U$ alle Glieder, welche sich integriren lassen, von dem Integralzeichen befreit; so muß der Inbegriff der unter diesem Zeichen zurückbleibenden von selbst Null sein, ohne daß man irgend eine Relation zwischen x, y, δx und δy anzunehmen genöthigt ist. Es sind mithin die Relationen (d) die Bedingungsgleichungen, unter welchen U ein genaues Differential, folglich $\int U$ integrabel ist.

Für $U = xd^2y - yd^2x$ sind diese Bedingungen $d^2y - d^2y = 0$ und $-d^2x + d^2x = 0$; und in der That ist $U = d(xdy - ydx)$.

§. 11. Anders führt Euler die Entwicklung für die Formel $\delta\int Vdx$, wenn in V nur die Veränderlichen x, y und Differentialcoefficienten von y vorkommen.

Es ist in diesem Falle

$\delta\int Vdx = \int\delta(Vdx) = \int\delta Vdx + \int Vd\delta x = V\delta x + \int(dx\delta V - dV\delta x)$, wegen

$$\int Vd\delta x = V\delta x - \int dV\delta x.$$

Hat man nun

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq + Rdr + \text{rc.};$$ mithin auch

$$\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \text{rc.};$$

so erhält man mittelst dieser Werthe folgenden Ausdruck:

$$dx\delta V - dV\delta x = N(dx\delta y - dy\delta x) + P(dx\delta p - dp\delta x) + Q(dx\delta q - dq\delta x) + R(dx\delta r - dr\delta x) + \text{rc.};$$

oder, wenn man $dy = pdx$, $dp = qdx$, $dq = rdx$ rc. setzt,

$$dx\delta V - dV\delta x = Ndx(\delta y - p\delta x) + Pdx(\delta p - q\delta x) + Qdx(\delta q - r\delta x) + Rdx(\delta r - s\delta x) + \text{rc.}$$

Man setze $\delta y - p\delta x = w$ und differentiire; es entsteht dadurch $d\delta y - pd\delta x - dp\delta x = dw$. Indem man die Variation von $dy = pdx$ nimmt und die Zeichen δ und d versetzt, kommt $d\delta y = pd\delta x + dx\delta p$. Mittelst dieses Werthes von $d\delta y$ verwandelt sich die vorhergehende Gleichung in $dx\delta p - dp\delta x = dw$, oder, wenn man qdx statt dp schreibt, in:

$$dx(\delta p - q\delta x) = dw.$$

Man findet ebenso:

$$dx(\delta q - r\delta x) = d\cdot\frac{dw}{dx};\quad dx(\delta r - s\delta x) = d\cdot\frac{1}{dx}\cdot d\cdot\frac{dw}{dx};\ \text{u. s. w.}$$

Mittelst dieser Werthe hat man:

$$\int(dx\delta V - dV\delta x) = \int Nwdx + \int Pdw + \int Q\cdot d\,\frac{dw}{dx} + \int R\cdot d\,\frac{1}{dx}\,d\cdot\frac{dw}{dx} + \text{rc.}$$

Integrirt man auf der zweiten Seite dieser Gleichung die Glieder theilweise, in welchen sich die Differentiationen auf w beziehen; so erhält man:

$$\int Pdw = Pw - \int\frac{dP}{dx}\,wdx;$$

$$\int Qd\cdot\frac{dw}{dx} = Q\,\frac{dw}{dx} - \int\frac{dw}{dx}\,dQ = Q\,\frac{dw}{dx} - \frac{dQ}{dx}\,w + \int wd\cdot\frac{dQ}{dx};$$

$$\int Rd\cdot\frac{1}{dx}d\cdot\frac{dw}{dx} = R\,\frac{1}{dx}\,d\cdot\frac{dw}{dx} - \frac{dR}{dx}\cdot\frac{dw}{dx} + \frac{1}{dx}\left(d\cdot\frac{dR}{dx}\right)w - \int wd\,\frac{1}{dx}\,d\cdot\frac{dR}{dx}.$$

u. s. w.

Mit diesen Ausdrücken bekommt man endlich:

$$\left.\begin{aligned}\delta\int V dx = V\delta x + w\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \text{etc.}\right) \\ + \frac{dw}{dx}\left(Q - \frac{dR}{dx} + \text{etc.}\right) + \frac{d^2w}{dx^2}(R - \text{etc.}) + \text{etc.} \\ + \int w dx\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \text{etc.}\right) + K,\end{aligned}\right\}\ (e)$$

wo K wieder die willkührliche Constante darstellt. Setzt man für w seinen Werth $\delta y - p\delta x$, so erhält der mit dem Integralzeichen $\int$ behaftete Theil die Form:

$$\int\left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\cdot d\cdot\frac{dQ}{dx} - \text{etc.}\right\} dx\delta y$$

$$-\int\left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\cdot d\cdot\frac{dQ}{dx} - \text{etc.}\right\} p dx\delta x,$$

aus welcher Darstellung sich sofort die Relation ergibt, in der die Coefficienten von δy und δx zu einander stehen. Bezeichnet man nämlich den ersten Coefficienten mit ψ, so wird der zweite $-p\psi$ sein; wonach, wenn der erste Null wird, auch der zweite verschwindet.

Erscheint in V noch eine andere von x abhängige Veränderliche z, nebst den Differentialcoefficienten

$$\frac{dz}{dx} = p', \frac{d^2z}{dx^2} = q' \dots ;$$

so müssen dem Ausdrucke (e) für diese Variable Glieder hinzugefügt werden, wie die Veränderliche y sie geliefert hat.

Anmerkung. Im vorliegenden Falle hat man für die Integrabilität von $V dx$ nur die eine Bedingungsgleichung:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{1}{dx}\cdot d\frac{dQ}{dx} - \text{etc.} = 0 \dots (f).$$

Es läßt sich jedoch nicht immer ein Differentialausdruck U auf die Form $V dx$, wo V nur x, y und Differentialcoefficienten von y enthält, zurückführen, wie wir dies an folgendem einfachen Beispiele

$$U = \frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx}\ \frac{d^2x}{dx} \text{ sehen.}$$

Setzt man nämlich $dy = p dx$, woraus $d^2y = dp dx + p d^2x$; so

geht dadurch der Ausdruck U in $U = \frac{dp}{dx} dx + 2p \frac{d^2x}{dx}$ über, dessen zweiter Theil sich nicht auf die Form Vdx reducirt. Dagegen ist eine solche Transformation für den Ausdruck

$$U = \frac{d^2y}{dx} - \frac{dy}{dx}, \frac{d^2x}{dx} \text{ möglich,}$$

welcher, wenn man statt d^2y den oben angegebenen Werth einführt, in $U = \frac{dp}{dx} dx$ übergeht.

§. 12. Unsere Formeln (c) und (e) mögen auf folgende Beispiele ihre Anwendung finden;

1. Es sei $U = \sqrt{dx^2 + dy^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}$. Man erhält:

$$\delta U = -\tfrac{1}{2} \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{y\sqrt{y}} \delta y + \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{dx\delta dx + dy\delta dy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}},$$

oder, wenn man $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = ds$ schreibt:

$$\delta U = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{ds}{y\sqrt{y}} \delta y + \frac{dx}{ds\sqrt{y}} \delta dx + \frac{dy}{ds\sqrt{y}} \delta dy.$$

Die Zusammenstellung dieses Ausdrucks mit der allgemeinen Formel des Paragraphen 10 liefert:

$$M = -\tfrac{1}{2} \frac{ds}{y\sqrt{y}},\ n = \frac{dx}{ds\sqrt{y}},\ N = \frac{dy}{ds\sqrt{y}};$$

$$m = 0,\ p = 0,\ q = 0,\ P = 0,\ Q = 0 \text{ u. s. w.}$$

Die im gegenwärtigen Fall auf

$$\delta \int U = n\delta x + N\delta y + \int [-dn\delta x + (M - dN)\delta y]$$

reducirte Formel (c) verwandelt sich hiernach in:

$$\delta \int U = \frac{dx}{ds\sqrt{y}} \delta x + \frac{dy}{ds\sqrt{y}} \delta y$$

$$- \int \left\{ d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{y}}\right) dx - d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{y}}\right) \delta y + \frac{ds}{2y\sqrt{y}} \delta y \right\}.$$

2. Es sei $V = \frac{p}{y} - \frac{xp^2}{y^2} + \frac{xq}{y}$.

Differentiiren wir die Größe V und vergleichen wir das Differential mit dem Ausdrucke

$$dV = Mdx + Ndy + Pdp + Qdq,$$

so haben wir:

$$M=-\frac{p^2}{y^2}+\frac{q}{y};\ N=-\frac{p}{y^2}+\frac{2xp^2}{y^3}-\frac{xq}{y^2};$$

$$P=\frac{1}{y}-\frac{2xp}{y^2};\ Q=\frac{x}{y}.$$

Hiernach geht die Formel (c) in:

$$\delta\int Vdx=\left(\frac{p}{y}-\frac{xp^2}{y^2}+\frac{xq}{y}\right)\delta x$$

$$-\frac{xp}{y^2}\cdot w+\frac{dw}{dx}\cdot\frac{x}{y}\ \text{über},$$

weil $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0$ wird.

§. 13. Wir wollen uns jetzt mit dem doppelten Integralausdruck von der Form $\iint Vdxdy$ beschäftigen, wo V eine Funktion von x, y, z und den partiellen Differentialcoefficienten

p, p', q, q', q'', r, r', r'', r''' u. s. w. ist.

Man hat $\delta\iint Vdxdy=\iint\delta Vdxdy+\iint V\delta(dxdy)$, und

$\iint V\delta(dxdy)=\iint V(dy\delta dx+dx\delta dy)$.

Integrirt man theilweise in Bezug auf x, und stellt durch $\frac{dV}{dx}$ den gesammten Differentialcoefficienten dar, indem man mit x alle davon abhängigen Funktionen z, p, p', ꝛc. sich ändern läßt; so erhält man:

$$\iint Vdy\delta dx=\int V\delta xdy-\iint\frac{dV}{dx}dxdy\delta x.$$

Indem man auf dieselbe Weise mit y verfährt, hat man:

$$\iint Vdx\delta dy=\int V\delta ydx-\iint\frac{dV}{dy}dxdy\delta y.$$

Mittelst dieser Ausdrücke bekommt man:

$$\delta\iint Vdxdy=\int V\delta xdy+\int V\delta ydx$$

$$+\iint\left\{\delta V-\frac{dV}{dx}\delta x-\frac{dV}{dy}\delta y\right\}dxdy.$$

Hat nun das Differential von V die Form:

$$\begin{aligned} dV = Ldx + Mdy + Ndz + Pdp &+ Qdq &+ Rdr \\ + P'dp' &+ Q'dq' &+ R'dr' \\ &+ Q''dq'' &+ R''dr'' \\ && + R'''dr''' \\ && + \text{ꝛc.}; \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} = L + Np + Pq &+ Qr \\ + P'q' &+ Q'r' \quad + \text{ꝛc.}, \\ &+ Q''r'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dy} = M + Np' + Pq' &+ Qr' \\ + P'q'' &+ Q'r'' \quad + \text{ꝛc.}, \\ &+ Q''r''' \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \delta V = L\delta x + M\delta y + N\delta z + P\delta p &+ Q\delta q \\ + P'\delta p' &+ Q'\delta q' \quad + \text{ꝛc.} \\ &+ Q''\delta q'' \end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in die Funktion

$$\delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y,$$

so verwandelt sich dieselbe in:

$$\begin{aligned} N(\delta z - p\delta x - p'\delta y) + P(\delta p - q\delta x - q'\delta y) &+ Q(\delta q - r\delta x - r'\delta y) \\ + P'(\delta p' - q'\delta x - q''\delta y) &+ Q'(\delta q' - r'\delta x - r''\delta y) + \text{ꝛc.} \\ &+ Q''(\delta q'' - r''\delta x - r'''\delta y) \end{aligned}$$

Mit Hülfe der Werthe von δp und $\delta p'$, welche in den Formeln (b) des Paragraphen 8 angegeben sind, findet man aber:

$$\delta p - q\delta x - q'\delta y = \frac{d(\delta z - p\delta x - p'\delta y)}{dx},$$

$$\delta p' - q'\delta x - q''\delta y = \frac{d(\delta z - p\delta x - p'\delta y)}{dy};$$

Ebenso geben uns die in diesem Paragraphen aufgestellten Werthe von δq, $\delta q'$, $\delta q''$:

$$\delta q - r\delta x - r'\delta y = \frac{d(\delta p - q\delta x - q'\delta y)}{dx} = \frac{d^2(\delta z - p\delta x - p'\delta y)}{dx^2},$$

$$\delta q' - r'\delta x - r''\delta y = \frac{d(\delta p - q\delta x - q'\delta y)}{dy} = \frac{d(\delta p' - q'\delta x - q''\delta y)}{dx}$$

$$= \frac{d^2(\delta z - p\delta x - p'\delta y)}{dxdy},$$

$$\delta q'' - r''\delta x - r'''\delta y = \frac{d(\delta p' - q'\delta x - q''\delta y)}{dy} = \frac{d^2(\delta z - p\delta x - p'\delta y)}{dy^2};$$

u. s. w.

Setzt man nun $\delta z - p\delta x - p'\delta y = w$, so kommt:

$$\iint dxdy \left\{ \delta V - \frac{dV}{dx}\delta x - \frac{dV}{dy}\delta y \right\} = \iint dxdy \left\{ Nw + \frac{Pdw}{dx} + \frac{Qd^2w}{dx^2} + \frac{P'dw}{dy} + \frac{Q'd^2w}{dxdy} + \text{rc.} \right\}$$

$$+ \frac{Q''d^2w}{dy^2}$$

Mittelst der Methode der theilweisen Integration findet man aber:

$$\iint Pdxdy\,\frac{dw}{dx} = \int Pwdy - \iint wdxdy\,\frac{dP}{dx};$$

$$\iint P'dxdy\,\frac{dw}{dy} = \int P'wdx - \iint wdxdy\,\frac{dP'}{dy};$$

$$\iint Qdxdy\,\frac{d^2w}{dx^2} = \int Qdy\,\frac{dw}{dx} - \iint dxdy\,\frac{dw}{dx}\frac{dQ}{dx}$$

$$= \int Qdy\,\frac{dw}{dx} - \int wdy\,\frac{dQ}{dx} + \iint wdxdy\,\frac{d^2Q}{dx^2};$$

$$\iint Q'dxdy\,\frac{d^2w}{dxdy} = \int Q'dx\,\frac{dw}{dx} - \iint dxdy\,\frac{dw}{dx}\frac{dQ'}{dy}$$

$$= \int Q'dx\,\frac{dw}{dx} - \int wdy\,\frac{dQ'}{dy} + \iint wdxdy\,\frac{d^2Q'}{dxdy};$$

$$= Q'w - \int wdx\,\frac{dQ'}{dx} - \int wdy\,\frac{dQ'}{dy} + \iint wdxdy\,\frac{d^2Q'}{dxdy};$$

$$\iint Q''dxdy\,\frac{d^2w}{dy^2} = \int Q''dx\,\frac{dw}{dy} - \int wdx\,\frac{dQ''}{dy} + \iint wdxdy\,\frac{d^2Q''}{dy^2},$$

welche partiellen Integrationen sich so weit fortsetzen lassen, als man nur immer will. Nimmt man diese Werthe zu Hülfe und ordnet in Bezug auf w, so findet man für die Variation der doppelten Integralformel $\iint Vdxdy$, in welcher sich die eine Integration blos auf die

Veränderliche x, die andere hingegen blos auf die Veränderliche y bezieht, folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
\delta\iint V dx dy = {} & w\left\{Q' - \frac{dR'}{dx} + \text{ꝛc.} - \frac{dR''}{dy} + \text{ꝛc.}\right\} + \frac{dw}{dx}\left\{R' - \text{ꝛc.}\right\} + \frac{dw}{dy}\left\{R'' - \text{ꝛc.}\right\} \\
& + \Bigg\{ \int V dy \delta x + \int w dy \left\{P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \text{ꝛc.} - \frac{dQ'}{dy} + \frac{d^2R'}{dxdy} + \frac{d^2R''}{dy^2}\right\} \\
& \quad + \int V dx \delta y + \int w dx \left\{P' - \frac{dQ''}{dy} + \frac{d^2R'''}{dy^2} - \text{ꝛc.} - \frac{dQ'}{dx} + \frac{d^2R''}{dxdy} + \frac{d^2R'}{dx^2}\right\} \\
& \quad + \int dy \frac{dw}{dx}\left\{Q - \frac{dR}{dx} + \text{ꝛc.} - \frac{dR'}{dy}\right\} + \int dx \frac{dw}{dy}\left\{Q'' - \frac{dR'''}{dy} + \text{ꝛc.} - \frac{dR''}{dx}\right\} \\
& \quad + \int dy \frac{d^2w}{dx^2}\left\{R - \text{ꝛc.}\right\} + \int dx \frac{d^2w}{dy^2}\left\{R''' - \text{ꝛc.}\right\} + \text{ꝛc.} \\
& \quad + \iint w dx dy \left\{N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} + \text{ꝛc.} - \frac{dP'}{dy} + \frac{d^2Q'}{dxdy} + \frac{d^2Q'}{dy^2}\right\} \Bigg\} \quad \ldots(g)
\end{aligned}
$$

Der mit dem doppelten Integralzeichen versehene Theil nimmt, wenn statt w sein Werth $\delta z - p\delta x - p'\delta y$ gesetzt wird, die Form:

$$\iint \varphi (\delta z - p\delta x - p'\delta y) dx dy$$

an, aus welcher sich sofort die Relationen ergeben, in denen die Coefficienten der Variationen δz, δx, δy zu einander stehen.

§. 14. Ein Beispiel wird hinreichend sein, das eben auseinandergesetzte Verfahren aufzuhellen.

Es sei $V = z + \sqrt{(1+p^2+p'^2)}$.

Man hat hier $N = 1$; $P = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+p'^2)}}$; $P' = \frac{p'}{\sqrt{(1+p^2+p'^2)}}$;

$$L = M = Q = Q' = \ldots = 0.$$

Die Formel (g) verwandelt sich im gegenwärtigen Falle in:

$$\delta\iint V dx dy = \int (z+\sqrt{1+p^2+p'^2})\,(dy\delta x + dx\delta y)$$
$$+\int \frac{w}{\sqrt{(1+p^2+p'^2)}}(p dy + p' dx)$$
$$+\iint w dx dy \left\{ 1 - \frac{1}{(1+p^2+p'^2)^{\frac{3}{2}}}\left((1+p'^2)\frac{dp}{dx} + (1+p^2)\frac{dp'}{dy} - 2pp'\cdot\frac{dp}{dy}\right)\right.,$$

insofern man erwägt, daß $\frac{dp}{dy} = \frac{dp'}{dx}$.

Anmerkung. Dem Leser, der sich noch anderweitig über den Variationscalcul zu belehren wünscht, können wir folgende Werke empfehlen:

1. Die Crelle'sche Uebersetzung der Lagrange'schen Werke.
2. Euler's Anleitung zur Integralrechnung, aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt von Salomon. Dritter und vierter Band.
3. Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik. Band 15 und 17.
4. Lacroix, Traité du calcul différential et intégral. Tome 2.
5. Mémoire sur le calcul des Variations, par Poisson, dans les mémoires de l'académie de l'institut de France. Tome XII.
6. Principes du calcul des variations, par Ampère, dans les annales des mathématiques, publieés par Gergonne. Tome 16.
7. Die Variationsrechnung als Anfang zur Lehre vom Größten und Kleinsten, von Dr. Martin Ohm. Berlin, bei Riemann.
8. Analytische Darstellung der Variationsrechnung, von E. Dirksen. Berlin, in der Schlesinger'schen Buchhandlung.

Anwendung der Variationsrechnung bei der Bestimmung des Größten und Kleinsten.

§. 15. Die allgemeine Theorie vom Größten und Kleinsten umfaßt mehrere wesentlich von einander verschiedene Theile. In dem ersten und einfachsten macht man sich zur Aufgabe, in einer zwischen x und y gegebenen Relation diejenigen Werthe von x zu bestimmen, für welche y ein Maximum oder Minimum wird; dieses Problem,

das ganz in das Gebiet der Differentialrechnung fällt, ist daselbst im zweiten Kapitel vollständig gelöst worden. In dem zweiten, der wie die anderen dem Variationscalcül angehört, handelt es sich um die Aufsuchung der Relation, welche zwischen x und y stattfinden muß, damit ein aus demselben oder ihren Differentialen zusammengesetzter Ausdruck ein Maximum oder Minimum werde. Der dritte Theil hat es mit der Bestimmung der zwischen x und y bestehenden Relation zu thun, welche einen innerhalb gewisser Grenzen genommenen Integralausdruck zu einem Maximum oder Minimum mache. Dergleichen Größten und Kleinsten heißen nach Euler absolute Maxima und Minima. Der vierte Theil endlich beschäftigt sich mit der Ausmittelung der zwischen x und y bestehenden Relation, für welche ein innerhalb bestimmter Grenzen genommener Integralausdruck einerlei Werth behält, während ein anderer zwischen denselben Grenzen genommener Integralausdruck ein Maximum oder Minimum wird. Derartige Größten und Kleinsten werden nach Euler relative Maxima und Minima genannt.

§. 16. Es sei jetzt $V=F(x, y, p, q \ldots)$, wo F eine gegebene Funktion bezeichnet und $p, q \ldots$ die Differentialcoefficienten von y darstellen. Es ist klar, daß der Werth von V anders ausfallen wird, wenn man für $y, p, q \ldots$ andere Funktionen von x nimmt. Fragt man nun nach denjenigen Funktionen für $y, p, q \ldots$ in x, welche V zu einem Maximum oder Minimum machen, d. h. dafür einen Werth liefern, der größer oder kleiner als die beiden angrenzenden Werthe ist; so hat man offenbar:

$$V'=F(x+\delta x, y+\delta y, p+\delta p \ldots) < F(x, y, p \ldots)$$

für ein Minimum, die Variationen $\delta x, \delta y, \delta p \ldots$, mögen positiv oder negativ sein.

Denkt man sich nun den Ausdruck $F(x+\delta x, y+\delta y, p+\delta p \ldots)$ nach dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelt, so hat man:

$$V'-V=\frac{dV}{dx}\delta x+\frac{dV}{dy}\delta y+\frac{dV}{dp}\delta p+ \text{rc.}$$
$$+\frac{d^2V}{dx^2}\delta x^2+\frac{d^2V}{dxdy}\delta x\delta y+\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2+ \text{rc.}$$
$$+ \text{rc.}$$

<0 für das Maximum und >0 für das Minimum, ganz unabhängig

von den Zeichen von δx, δy, δp .... Da wir aber diese Reihe, wenn die Größen δx, δy, δp ... hinlänglich klein gedacht werden, stets dergestalt nehmen können, daß das Zeichen ihres Werthes blos durch das Zeichen der mit den ersten Potenzen der Variationen δx, δy ... behafteten Glieder bedingt ist, welche Variationen wir positiv oder negativ wählen dürfen; so muß die Summe dieser Glieder oder δV für ein Maximum oder Minimum, unabhängig von δx, δy ..., Null sein, wir haben hiernach:

$$\frac{dV}{dx}=0,\ \frac{dV}{dy}=0,\ \frac{dV}{dp}=0 \ldots$$

Stimmen alle diese Gleichungen unter einander überein, was auch x für einen Werth haben mag; so kann ein Maximum oder Minimum stattfinden. Die Relation zwischen x und y ist die gesuchte Gleichung $y=\varphi x$, welche die vorgelegte Funktion V zu einem Maximum oder Minimum machen kann, was für jede andere zwischen x und y bestehende Relation nicht der Fall ist. Damit ein Maximum oder Minimum wirklich statt hat, müssen überdies die Glieder, welche mit den zweiten Potenzen der Variationen δx, δy ... behaftet sind, immerfort dasselbe Vorzeichen behalten, d. h. es muß $\delta^2 V$ allemal negativ für das Maximum und allemal positiv für das Minimum sein.

Wenn sämmtliche vorhergehenden Gleichungen verschiedene Relationen zwischen x und y liefern, so ist dies ein Zeichen, daß die Aufgabe eine solche Allgemeinheit, welche man ihr beigelegt hat, nicht gestattet. Trifft sich's hingegen, daß blos einige dieser Gleichungen in Uebereinstimmung sind, so kann die Funktion ein Maximum oder Minimum besitzen, jedoch nur für einige der Größen x, y, p ...; die mit einander harmonirenden Gleichungen sind es dann, welche die Relation feststellen, der ein Maximum oder Minimum zukommt. Soll V blos für eine der Größen x, y, p ... ein Maximum oder Minimum abgeben, so ist das Problem jederzeit möglich, weil man dann nur einer einzigen Gleichung Genüge zu thun hat.

§. 17. Um das Gesagte durch einige Beispiele zu erläutern, wählen wir vorerst folgende zwei Aufgaben, welche auf blos Urfunktionen enthaltende Ausdrücke führen.

I. Unter allen auf dasselbe rechtwinkelige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven diejenige zu finden, welche für eine beliebige Abscisse x das Produkt der derselben entsprechenden Ordinate y und gedachter um die Ordinate verminderten Abscisse zu einem Maximum macht.

Der Natur der Aufgabe gemäß ist hier $V=y(x-y)$; daraus:

$$\delta V=\frac{dV}{dy}\delta y=(x-2y)\delta y,$$

indem jedes ebengedachte x für alle Curven einerlei ist.

Aus $\delta V=0$ folgt $y=\frac{1}{2}x$; die Gerade, welche die Abscissenachse unter einem Winkel schneidet, dessen trigonometrische Tangente $=\frac{1}{2}$ ist, besitzt daher die verlangte Eigenschaft, weil $\delta^2 V$ für jeden reellen Werth von δy negativ bleibt.

II. Für y und z solche Funktionen in x zu finden, daß der Ausdruck

$$V=x^2+y^2+z^2+kx-xy-xz-yz$$

für einen gewissen Werth von x ein Minimum werde.

Man hat hier: $\delta V=(2y-z-x)\delta y+(2z-y-x)\delta z$.

Aus $\delta V=0$ folgt $2y-z-x=0$ und $2z-y-x=0$, oder $y=x$ und $z=x$. Diese Relationen geben ein Minimum, weil $\delta^2 V$ für reelle Werthe von δy und δz stets positiv wird.

§. 18. Zu den Aufgaben, welche auf Ausdrücke führen, in denen Differentiale vorkommen, gehören folgende zwei:

I. Unter allen durch einen und denselben Punkt (α, β) gehenden Curven $y=\varphi x$ diejenige zu finden, welche die Eigenschaft besitzt, daß, wenn die an jeden ihrer Punkte (x, y) gezogene Tangente verlängert wird, das Produkt der beiden Stücke, die unsere Tangente auf den zu den Abscissen gehörigen, der Ordinatenachse parallel geführten Geraden abschneidet, ein Maximum oder Minimum ist. Die Gleichung der Tangente ist bekanntlich:

$$Y-y=p(X-x),$$

wo X und Y die Coordinaten irgend eines Punktes derselben bedeuten und $p=\frac{dy}{dx}$ ist. Die den Abscissen m und n entsprechenden Ordinaten l und h sind hiernach:

$$l=y+p(m-x) \text{ und } h=y+p(n-x).$$

Man hat alsdann: $V=[y+p(m-x)][y+p(n-x)]$.

Sucht man die Ausdrücke $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dp}$, und setzt sie gleich Null, so findet man, daß diese Gleichungen nicht mit einander harmoniren.

Begnügt man sich mit $\frac{dV}{dy}=0$ und $\frac{dV}{dp}=0$, so hat man die beiden Gleichungen:

$$2y+p(m+n-2x)=0 \text{ und } (m+n-2x)y+2p(n-x)(m-x)=0,$$

denen $y=0$ zugleich Genüge thut. Die Absciſſenachſe gibt hier keine Auflöſung der Aufgabe, inſofern β nicht $=0$ iſt. Wenn aber auch $\beta=0$ wäre, ſo würde dennoch $y=0$ kein Maximum oder Minimum für V liefern, weil δ^2V für $y=0$ nicht immer poſitiv und auch nicht immer negativ ausfällt.

Macht man blos $\frac{dV}{dp}=0$, in welchem Falle die Curven ſämmtlich durch den Punkt (x, y) gehen, für den gerade die Tangente gezogen gedacht wird; ſo hat man:

$$\frac{2p}{y}=\frac{2dy}{ydx}=\frac{2x-m-n}{(x-m)(x-n)}=\frac{1}{x-m}+\frac{1}{x-n}.$$

Durch Integration entſteht $y^2=C(x-m)(x-n)$, wo die Conſtante C durch die Bedingung beſtimmt wird, daß $y=\beta$ dem $x=\alpha$ entſprechen ſoll. Die Gleichung der geſuchten Curve iſt hiernach:

$$\frac{y^2}{\beta^2}=\frac{(x-m)(x-n)}{(\alpha-m)(\alpha-n)}.$$

Dieſe Gleichung gehört einer Ellipſe an, wenn α zwiſchen m und n liegt, dagegen einer Hyperbel, wenn α größer oder kleiner als m und n iſt. Man hat ferner:

$$\delta^2V=2(m-x)(n-x)\left(\frac{d\delta y}{dx}\right)^2,$$

welcher Ausdruck für alle Werthe von x poſitiv iſt, für welche die Größe $(m-x)$ und $(n-x)$ gleiche, hingegen negativ, für welche dieſelben entgegengeſetzte Zeichen haben. Unſer V wird daher zu einem Maximum für alle Werthe von x, welche zwiſchen m und n enthalten ſind, für alle übrigen Werthe dagegen zu einem Minimum.

Was den Werth von V anlangt, ſo findet man denſelben $=-\frac{C}{4}(m-n)^2$, d. h. gleich einer conſtanten Größe.

Soll unser Produkt ein Minimum oder Maximum werden in der Art, daß für einerlei Werth von x die Tangenten der verschiedenen Curven zu einander parallel laufen; so ist blos $\frac{dV}{dy}=0$ zu setzen, weil dann δp für denselben Werth von x verschwindet. Man erhält hiernach $2y+(m+n-2x)\frac{dy}{dx}=0$, oder, nachdem integrirt worden, $y=C\left(x-\frac{m+n}{2}\right)$, welche Gleichung eine gerade Linie darstellt. Durch diese Relation wird die Funktion in der That zu einem Minimum, weil $\delta^2 V=2\delta y^2$ für jeden reellen Werth von δy positiv bleibt.

II. Die Curve anzugeben, bei der in jedem ihrer Punkte das Quadrat der Subnormale vermehrt um die Abscisse ein Minimum ist. Man hat $V=(yp+x)^2$, woraus man zwei unter einander harmonirende Gleichungen erhält, wenn $yp+x=0$ gesetzt wird, deren Integral $y^2+x^2=r^2$ ist. Sämmtliche aus dem Ursprung als Mittelpunkt beschriebenen Kreise leisten daher allein der Aufgabe Genüge.

§. 19. Soll ein zwischen angewiesenen Grenzen genommener Integralausdruck $\int U$ oder $\int V dx$ ein Maximum oder Minimum sein, so besteht als gemeinschaftliche Bedingungsgleichung des Maximum's und Minimum's:

$$\int \delta U=0 \text{ oder } \int \delta V dx=0,$$

wobei überdies $\int \delta^2 U$ oder $\int \delta^2 V dx$ immer dasselbe Vorzeichen beibehalten, nämlich beständig negativ für ein Maximum und beständig positiv für ein Minimum sein muß; alles innerhalb der gegebenen Grenzen genommen. Die Entwickelungen von $\int \delta U$ und $\int \delta V dx$ [Formel (c) §. 10, und Formel (e) §. 11] bestehen nun aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen, indem der eine von dem Integralzeichen befreit, der andere dagegen mit demselben behaftet ist. Wegen der durch die Natur der Aufgabe gebotenen Unabhängigkeit von δx und δy können diese beiden Theile nicht unter einander verglichen werden; die Bedingung $\int \delta U=0$ oder $\int \delta V dx=0$ läßt sich daher im Allgemeinen nicht erfüllen, wenn nicht der unter dem Integralzeichen befindliche Theil für sich und der von demselben befreite Theil für sich der Null gleich ist. Die Bedingung $\int \delta U=0$ liefert hiernach vorerst die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} m - dn + d^2p - d^3q + \text{ꝛc.} = 0 \\ M - dN + d^2P - d^3Q + \text{ꝛc.} = 0 \end{array}\right\} \text{(d)},$$

deren Anzahl im Allgemeinen mit derjenigen der unabhängigen Variationen übereinstimmen wird. Diese Gleichungen, welche die gesuchten Relationen enthalten, heißen die **Gleichungen des Maximum's und Minimum's** und sind Differentialgleichungen, die noch integrirt werden müssen; sie dürfen, wofern die Aufgabe nicht absurd sein soll, keine von einander verschiedene Relationen ausdrücken, weil sie sonst numerische Werthe für die Veränderlichen liefern würden. Im Fall sich U auf die Form Vdx bringen läßt, hat man nur eine Gleichung des Maximum's und Minimum's, nämlich:

$$m - dn + d^2p - d^3q + \text{ꝛc.} = 0 \ . \ . \ . \ \text{(f)}.$$

Bei geometrischen Problemen sind diese Gleichungen (d) und (f) jene der fraglichen Curve, welcher die verlangte Eigenschaft in Bezug auf ein Maximum oder Minimum zukommt.

§. 20. Wenn die Integration der Gleichungen (d) oder (f) bewerkstelliget ist und solche zwischen bestimmten Grenzen genommen werden soll, so werden sich die übrigbleibenden Glieder der Gleichungen (c) oder (e) auf diese Grenzen beziehen; sie werden nun die Form $K+L=0$ haben, wo L eine Funktion von x, y, δx, δy . . . ist. Wir wollen die numerischen Werthe dieser Veränderlichen bei der ersten Grenze oder dem Anfange des Integrals mit einem, und bei der zweiten Grenze oder dem Ende des Integrals mit zwei Accenten andeuten. Um den vollständigen Werth des Integrals zu erhalten, müssen wir den Unterschied der Werthe von L nehmen, welche den beiden Grenzen des Integrals entsprechen und diesen Unterschied $L_{,,}-L_{,}$ gleich Null setzen. Diese Gleichung $L_{,,}-L_{,}=0$ kann keine Veränderlichen mehr enthalten, weil x, δx . . . die durch die Grenzen der Integration festgestellten Werthe $x_{,}$, $\delta x_{,}$ . . . $x_{,,}$, $\delta x_{,,}$ . . . angenommen haben. Sie heißt deshalb die **Grenzgleichung für das Maximum oder Minimum**, und dient mit den daraus entspringenden Bedingungen im Allgemeinen zur Bestimmung der durch die Integration der Gleichungen (d) oder (f) eingegangenen willkührlichen Constanten. In unserer Grenzgleichung können nun die Variationen δx, δy, δdx, δdy . . . entweder Null oder auch durch gegebene Relationen mit einander verbunden sein, je nachdem jene

Grenzen fest oder veränderlich sind. Es bieten sich hier vier besondere Fälle dar.

1. Wenn die Grenzen gegeben und fest sind, d. h. wenn die äußersten Werthe von x und y constant sind. In diesem Falle sind die Variationen δx, $d\delta x$, . . . dy, $d\delta y$ . . . Null, folglich auch alle Glieder von $L_{,}$ und $L_{,,}$ gleich Null, und den Gleichungen (c) oder (e) geschieht an und für sich Genüge. Man bestimmt alsdann die Constanten, welche die Integration der Bedingungsgleichungen (d) oder (f) herbeigeführt hat, den für die Grenzen angenommenen Bedingungen gemäß. Dieser Fall kommt in der Geometrie auf denjenigen zurück, in welchem man eine Curve sucht, die außerdem, daß sie die verlangte Eigenschaft des Maximum's oder Minimum's besitzt, noch durch zwei gegebene Punkte gehen soll. Die Gleichungen (d) oder (f) gehören der gesuchten Curve an; die willkührlichen Constanten bestimmt man dann, indem man die Curve durch die zwei gegebenen Punkte gehen läßt.

2. Wenn die Grenzen willkührlich und unabhängig sind; jeder von den Coefficienten der Variationen $\delta x_{,}$, $\delta x_{,,}$ . . . der Grenzgleichung wird hier insbesondere gleich Null gesetzt.

3. Wenn für die Grenzen Bedingungsgleichungen existiren, d. h. wenn die Natur der Aufgabe Relationen zwischen einigen der Größen $x_{,}$, $y_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,,}$ aufstellt. Bei dem gegenwärtigen Umstande werden die Variationen $\delta x_{,}$, $\delta y_{,}$ und $\delta x_{,,}$, $\delta y_{,,}$ dieselben gegenseitigen Beziehungen zu einander haben, wie die Differentiale dx, dy in Bezug auf jene gegebenen Relationen. Vermittelst dieser Beziehungen wird man demnach einige der Variationen als Funktionen der andern erhalten. Indem man die letztern in die Gleichung $L_{,,}—L_{,}=0$ einführt, finden sich unsere Variationen auf die möglich kleinste Anzahl reducirt; um der letzten Gleichung Genüge zu leisten, müssen hierauf die Coefficienten der unabhängig bleibenden Variationen, jeder für sich genommen, gleich Null gesetzt werden. Der hier betrachtete Fall kommt in der Geometrie vor, wenn verlangt wird, daß die mit dem Maximum oder Minimum behaftete Curve nicht mehr durch zwei gegebene Punkte, sondern zwischen zwei gegebenen krummen Linien liegen soll.

Anstatt des eben angeführten Verfahrens kann man auch folgendes einschlagen, welches viel eleganter ist. Es seien $u=0$, $v=0$ . . .

die gegebenen Bedingungsgleichungen. Indem man ihre Variationen δu, δv . . mit den unbestimmten Größen λ, λ' . . . multiplicirt, bekommt man den Ausdruck $\lambda\delta u + \lambda'\delta v$ . . ., welcher eine bekannte Funktion von $\delta x_{,}$, $\delta x_{,,}$, $\delta y_{,}$ . . . ist. Wird diese Summe zu $L_{,,} - L_{,} = 0$ gezählt, so hat man:

$$L_{,,} - L_{,} + \lambda\delta u + \lambda'\delta v \ . \ . \ . = 0 \quad (4).$$

Man behandelt jetzt alle Variationen $\delta x_{,}$, $\delta x_{,,}$ . . . als unabhängig, setzt ihre Coefficienten gleich Null, und eliminirt zwischen diesen Gleichungen die unbestimmten Größen λ, λ' . . . Durch diesen Calcül gelangt man zu dem nämlichen Resultate wie mittelst der vorhergehenden Methode, indem man dieselbe Anzahl von Finalgleichungen erhält.

Wir müssen hier noch bemerken, daß man aus den Gleichungen $u=0$, $v=0$ . . . an den Grenzen noch nicht das Stattfinden von $du=0$, $dv=0$ . . . folgern dürfe, denn diese Bedingungen sind von einander unabhängig und können sehr wohl nicht zugleich statthaben. Insofern dies jedoch der Fall wäre, müßte man $du=0$, $dv=0$ . . . als neue Bedingungen ansehen, und außer dem Gliede $\lambda\delta u$ . . . auch noch das Glied $\lambda'\delta du$ darunter begreifen. — Es findet das Gesagte z. B. in der aus der Geometrie entnommenen Aufgabe statt, wo die gesuchte Curve an ihrer Grenze eine Berührung von einer gewissen Ordnung mit der Curve, deren Gleichung $u=0$ ist, eingehen soll.

4. Ueber den Fall, in welchem eine der Grenzen bestimmt, die andere aber gewissen Bedingungen unterworfen, oder auch ganz und gar willkührlich ist, haben wir nichts Besonderes zu erinnern, weil er sich auf die drei vorhergehenden zurückführen läßt. Hier geht die gesuchte Curve an einem ihrer Enden durch einen festen Punkt, während das andere auf einer gegebenen Curve liegt oder ganz willkührlich bleibt.

§. 21. Es kann sich auch ereignen, daß die Natur der Aufgabe die Variationen δx δy, δz gewissen, durch die Gleichungen $\varepsilon=0$, $\vartheta=0$ bestimmten Bedingungen unterwirft und zwar dies ganz unabhängig von den Grenzen, wie z. B. solches der Fall ist, wenn die gesuchte Curve auf einer gegebenen Fläche liegen soll. Die Variationen δx, δy, δz müssen alsdann der Differentialgleichung dieser Oberfläche genügen; es ist daher nöthig, in den Bedingungsgleichungen des Größten

und Kleinsten die Variationen, wie oben, auf die möglich kleinste Anzahl mittelst jener Relationen $\varepsilon=0$, $\vartheta=0$ zu reduciren und die Coefficienten der übrig gebliebenen Variationen gleich Null zu setzen; oder was auf eins hinauskommt, unserer Bedingungsgleichung des Größten und Kleinsten noch die Glieder $\lambda\delta\varepsilon+\lambda'\delta\vartheta$ . . . hinzuzufügen, diese Gleichung dann in andere zu zerfällen, indem man δx, δy, δz als unabhängig ansieht, und endlich die unbestimmten Größen λ, λ' . . . zu eliminiren.

§. 22. Eine auf relative Maxima und Minima bezügliche Aufgabe, wo es sich nämlich darum handelt, unter allen Relationen zwischen x und y, diejenige aufzufinden, welche das Integral $\int U$ innerhalb der Grenzen $x=x_{,}$ und $x=x_{,,}$ zu einem Maximum oder Minimum macht, während das Integral $\int U'$ zwischen denselben Grenzen den unveränderten Werth A beibehält, wird nach Euler auf folgende Art gelöst. Man setze die Variation der Funktion:

$$\int U + a'\int U',$$

wo a' ein unbestimmter constanter Factor ist, gleich Null. Ist dergestalt jene Relation zwischen x und y ermittelt worden, welche diese Funktion zu einem Maximnm oder Minimum macht; so hat man gleichzeitig damit die Relation, für welche $\int U$ selbst ein Maximum oder Minimum wird, während $\int U'$ immer gleich A bleibt. Der unbestimmte Factor a' dient, die Gleichung $\int U'=A$ in Erfüllung zu bringen. Soll noch ein anderes Integral $\int U''$ zwischen denselben Grenzen unverändert bleiben, indem $\int U$ ein Maximum oder Minimum wird; so wird jenes Integral mit einem andern Coefficienten a'' multiplicirt und dann die Function y von x bestimmt, daß sie die Gleichung $\delta(\int a'U'+\int a''U''+\int U)=0$ befriedigt.

Aufgaben über Maxima und Minima unbestimmter Integralformeln.

§. 23. Wir wollen nun die vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen auf einige interessante Aufgaben anwenden.

Erste Aufgabe. Die Curve CMK (Fig. 4) zu finden, für welche das zwischen zwei Leitstrahlen AM und AK enthaltene Längestück ein Kleinstes werde. Man hat hier $\int U = s = \int\sqrt{(u^2 d\vartheta^2+du^2)}$,

wo es sich darum handelt, die Relation $u = \varphi\vartheta$ zu finden, welche $\int U$ zu einem Minimum macht. Man hat die Variation:

$$\delta U = \frac{u d\vartheta^2 \cdot \delta u + u^2 d\vartheta \cdot \delta d\vartheta + du \cdot \delta du}{\sqrt{(u^2 d\vartheta^2 + du^2)}},$$

woraus man durch Vergleichung dieses Ausdruckes mit den im §. 10 aufgeführten Formeln (c) und (d), indem $x = u$, $y = \vartheta$ gesetzt wird, erhält:

$$m = \frac{u d\vartheta^2}{ds},\quad n = \frac{du}{ds},\ M = 0,\ \Gamma = \frac{u^2 d\vartheta}{ds},\ 0 = p = P \ldots ;$$

ferner für die Bedingungen des Kleinsten:

$$\frac{u d\vartheta^2}{ds} = d\left(\frac{du}{ds}\right),\quad \frac{u^2 d\vartheta}{ds} = c.$$

Bei der Elimination von $d\vartheta$ und ds zwischen der Relation $ds^2 = u^2 d\vartheta^2 + du^2$ und den zwei vorhergehenden Gleichungen findet man, daß die letztern mit einander übereinstimmen; es ist daher hinreichend, eine derselben zu integriren. Das (Fig. 4) vom Ursprung A auf die Berührungslinie TM gefällte Perpendikel AI ist aber gleich:

$$AM \times \sin AMT = u \sin\beta = \frac{u\,tg\,\beta}{\sqrt{(1 + tg^2\beta)}} = \frac{u^2 d\vartheta}{\sqrt{(u^2 d\vartheta^2 + du^2)}} = \frac{u^2 d\vartheta}{ds} = c,$$

wenn wir erwägen, daß $tg\,\beta = \frac{u d\vartheta}{du}$ (Siehe §. 79 der Differentialrechnung). Da nun jene Senkrechte hier constant ist, so muß die gesuchte Linie eine Gerade sein. Die Grenzpunkte M und K sind unbestimmt, mithin ist die Betrachtung der Grenzgleichung hier gar nicht weiter nothwendig.

§. 24. **Zweite Aufgabe.** Die kürzeste Linie zwischen zwei gegebenen Punkten oder zwischen zwei gegebenen Curven zu finden.

Bezeichnet s die Länge der gesuchten Linie, so ist $s = \int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$. Damit die Linie die geforderte Eigenschaft erlange, muß die Variation des angeführten Integrals verschwinden, d. h. es muß

$$\delta\int\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = 0 \text{ sein.}$$

Aus dieser Gleichung folgt:

$$\int\frac{dx}{ds}\,\delta\,dx + \int\frac{dy}{ds}\,\delta\,dy + \int\frac{dz}{ds}\,\delta dz = 0,$$

oder, wenn man die Ordnung der Zeichen d und δ verwechselt und theilweise integrirt:

$$\frac{dx}{ds}\delta x+\frac{dy}{ds}\delta y+\frac{dz}{ds}\delta z-\int\left(d\frac{dx}{ds}\delta x+d\frac{dy}{ds}\delta y+d\frac{dz}{ds}\delta z\right)=0.$$

Der nicht integrirte Theil gibt uns die Gestalt der gesuchten Linie; er liefert uns die drei Gleichungen:

$$d\left(\frac{dx}{ds}\right)=0,\ d\left(\frac{dy}{ds}\right)=0,\ d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0,$$

woraus: $dx=ads,\ dy=bds,\ dz=cds.$

Werden diese Gleichungen quadrirt und addirt, so erhält man $a^2+b^2+c^2=1$, welche Bedingung erfüllt werden muß, wenn diese Gleichungen unter einander vereinbar sein sollen. Durch Division findet man: $\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a},\ \frac{dz}{dx}=\frac{c}{a},$

und daraus durch Integration:

$$bx=ay+a',\ cx=az+b',$$

welche Gleichungen einer geraden Linie angehören, deren Lage bestimmt sein wird, wenn man die fünf Constanten a, b, c, a' und b' kennt.

1. Soll die Linie durch zwei gegebene feste Punkte (Fig. 5) $A(x_, y_, z_,)$ und $C(x_{,,} y_{,,} z_{,,})$ gehen, so sind die Variationen der Coordinaten derselben für sich Null, und der zweite von dem Integralzeichen unabhängige Theil unserer obigen Bedingungsgleichung kommt weiter in keine Betrachtung. Unterwirft man die Gleichungen unserer Linie der Bedingung, daß ihnen Genüge geschieht, wenn darin $x_,$, $x_{,,}$ $y_,$ . . . statt x, y, z gesetzt wird; so erhält man vier Gleichungen, mittelst derer in Verbindung mit $a^2+b^2+c^2=1$ sich die fünf Constanten bestimmen lassen.

2. Soll die zweite Grenze ein in der Ebene xy liegender Punkt und die erste eine in derselben Ebene befindliche Curve AB sein, so ist die Gleichung $bx=ay+a'$ alsdann ausreichend. Es sei $y_,=fx_,$ die Gleichung der Curve; man folgert daraus $\delta y_,=A\delta x_,$; die Gleichung $L_,=0$ wird hier

$$\frac{dx}{ds}\cdot\delta x+\frac{dy}{ds}\cdot\delta y=0.$$

Da die zweite Grenze C fest ist, so braucht man nur die Gleichungen $\delta y_, = A\delta x_,$ und $dx_,\delta x_, + dy_,\delta y_, = 0$ mit einander zu verbinden. Eliminirt man $\delta y_,$, so kommt $dx_, + A dy_, = 0$.

Man hätte auch die Bedingungsgleichung $\delta y_, - A\delta x_, = 0$ mit dem unbestimmten Coefficienten λ multipliciren und zu $L_,$ hinzufügen können, wodurch:

$$\frac{dx_,}{ds_,} \cdot \delta x_, + \frac{dy_,}{ds_,} \delta y_, + \lambda dy_, - \lambda A \cdot \delta x_, = 0$$

entstanden wäre. Daraus folgt:

$$\frac{dx_,}{ds_,} - \lambda A = 0, \quad \frac{dy_,}{ds_,} + \lambda = 0;$$

eliminirt man hierauf λ, so erhält man ebenfalls $dx_, + A dy_, = 0$.

Weil aber der Punkt $A(x_,, y_,)$ auf unserer geraden Linie AC liegt, so hat man $b dx_, = a dy_,$; folglich:

$$a = -bA \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{A} = \frac{b}{a};$$

hieraus erhellet, daß die Gerade AC zu der gegebenen Curve AB normal ist. Die Constante a' wird durch die Betrachtung der zweiten Grenze, welche fest ist, bestimmt.

Es ist leicht, die vorige Schlußweise auch auf drei Dimensionen anzuwenden, wobei man zu demselben Resultate gelangen wird.

Man kann daher überhaupt sagen, daß die kürzeste Entfernung AC (Fig. 6) zweier Curven AB, CD ihre gemeinschaftliche Normale ist.

3. Soll die Gerade zwischen einem festen Punkt und einer krummen Fläche gezogen werden, deren Differentialgleichung $dz = p dx + q dy$ ist, so muß bei der letzten Grenze $\delta z_{,,} = p_{,,}\delta x_{,,} + q_{,,}\delta y_{,,}$ sein.

Die Grenzgleichung verwandelt sich hiernach in:

$$(dx_{,,} + p_{,,}dz_{,,})\delta x_{,,} + (dy_{,,} + q_{,,}dz_{,,})\delta y_{,,} = 0.$$

Wegen der gegenseitigen Unabhängigkeit der Variationen $\delta x_{,,}$ und $\delta y_{,,}$ zerfällt diese Gleichung in folgende:

$$dx_{,,} + p_{,,}dy_{,,} = 0 \text{ und } dy_{,,} + q_{,,}dz_{,,} = 0,$$

woraus hervorgeht, daß die fragliche Gerade auf der gegebenen Fläche senkrecht steht.

4. Soll die gesuchte Linie der ganzen Länge nach auf der krummen Fläche, deren Gleichung $u=0$ ist, liegen; so läßt sich die

Bedingungsgleichung des Kleinsten nicht mehr in drei zerlegen, wenn man nicht das Glied $\lambda\delta u$ hinzufügte. Man kann in solchem Falle δx, δy und δz als unabhängig ansehen und erhält dergestalt folgende Relationen:

$$d\frac{dx}{ds}+\lambda\frac{du}{dx}=0,\quad d\frac{dy}{ds}+\lambda\frac{du}{dy}=0,\quad d\frac{dz}{ds}+\lambda\frac{du}{dz}=0.$$

Durch die Elimination von λ erhält man die beiden Gleichungen:

$$\frac{du}{dz}d\left(\frac{dx}{ds}\right)=\frac{du}{dx}d\left(\frac{dz}{ds}\right),\quad \frac{du}{dy}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=\frac{du}{dz}d\left(\frac{dy}{ds}\right),$$

welche diejenigen der gesuchten, sogenannten geodätischen, Linie sind.

Es sei z. B. die kürzeste Entfernung A′C′ (Fig. 6) auf einer Kugel, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt, zu bestimmen; man hat hier:

$$u=x^2+y^2+z^2-r^2=0,\quad \frac{du}{dx}=2x,\quad \frac{du}{dy}=2y,\quad \frac{du}{dz}=2z.$$

Unsere Bedingungsgleichungen verwandeln sich demnach, wenn ds als constant angesehen wird, in:

$$zd^2x=xd^2z,\quad zd^2y=yd^2z,\ \text{woraus}\ yd^2x=xd^2y.$$

Daraus folgt durch Integration:

$$zdx-xdz=ads,\quad zdy-ydz=bds,\quad ydx-xdy=cds.$$

wo a, b und c die Constanten der Integration sind.

Indem man die erste dieser Gleichungen mit $-y$, die zweite mit x, die dritte mit z multiplicirt und dann addirt, findet man $ay=bx+cz$, d. h. die Gleichung einer durch den Ursprung gehenden Ebene. Die verlangte Curve ist daher der größte Kreis A′C′ (Fig. 6), welcher durch die beiden gegebenen Punkte geht, oder die beiden Curven A′B und C′D, welche als Grenzen dienen, rechtwinkelig schneidet.

§. 25. Dritte Aufgabe. Wenn ein Körper sich in einer Flüssigkeit bewegt, so erleidet er einen Widerstand, welcher, unter übrigens gleichen Umständen, von seiner Form abhängt. Ist jener Körper durch Rotation erzeugt und bewegt er sich in der Richtung seiner Achse, so lehrt die Mechanik, daß der möglich kleinste Widerstand stattfindet, wenn die Gleichung der Erzeugungslinie die Relation $\int\frac{ydy^3}{dx^2+dy^2}$ zu einem Minimum macht. Um die Erzeugungslinie des Körpers von geringstem Widerstande zu bestimmen, nehme

man daher die Variation des vorstehenden Ausdrucks; man findet:

$$m=0,\ n=\frac{-2ydy^3dx}{(dx^2+dy^2)^2}=\frac{-2yp^3}{(1+p^2)^2};$$

$$M=\frac{dy^3}{dx^2+dy^2}=\frac{p^3dx}{1+p^2},\ N=\frac{yp^2(3+p^2)}{(1+p^2)^2};$$

die übrigen Coefficienten sind Null. Die zweite Bedingungsgleichung (d) ist $M-dN=0$; ferner hat man:

$$d\left(\frac{p^3y}{1+p^2}\right)=Mp+Ndp=pdN+Ndp,\ \text{wegen } M=dN.$$

Hieraus entsteht durch Integration:

$$a+\frac{p^3y}{1+p^2}=Np=\frac{yp^3(3+p^2)}{(1+p^2)^2};\ \text{folglich } a(1+p^2)^2=2p^3y.$$

Die erste Bedingungsgleichung (d) hätte sofort das nämliche Resultat $-dn=0$ oder $-n=a$ gegeben, wonach diese beiden Gleichungen zu demselben Ziele führen. Man hat:

$$y=\frac{a(1+p^2)^2}{2p^3},\ x=\int\frac{dy}{p}=\frac{y}{p}+\int\frac{ydp}{p^2};$$

indem man statt y seinen Werth substituirt, ist es leicht, dieses Integral zu bestimmen. Man braucht hernach nur noch p zwischen diesen Werthen von y und x zu eliminiren, um die Gleichung der gesuchten Curve zu erlangen; die darin vorkommenden zwei Constanten sind den gegebenen Bedingungen gemäß zu bestimmen.

Anmerkung. Um zu zeigen, wie man sich hier der Formeln des §. 11 bedienen könne, nehmen wir statt des Ausdruckes $\int\frac{ydy^3}{dx^2+dy^2}$ seinen gleichgeltenden $\int\frac{p^3ydx}{1+p^2}$; mithin:

$$V=\frac{p^3y}{1+p^2},\ \text{woraus } M=0,\ N=\frac{p^3}{1+p^2},\ P=\frac{3p^2+p^4}{(1+p^2)^2}y.$$

Der mit dem Integralzeichen $\int$ behaftete Theil der Variation liefert $Ndx-dP=0$; außerdem hat man $dV=Ndy+Pdp$, oder, wenn darin statt N sein aus der vorhergehenden Gleichung entnommener Werth substituirt wird: $dV=pdP+Pdp$. Hieraus ergibt sich für die Gleichung der gesuchten Curve:

$$V=pP+c\ \text{d. h.}\ \frac{p^3y}{1+p^2}=\frac{3p^3+p^5}{(1+p^2)^2}y+c,$$

oder, wenn man reducirt:

$$2p^3y + c(1+p^2)^2 = 0;$$

woraus, bei Aenderung der Constante, entspringt: $y = \frac{c(1+p^2)^2}{p^3}$.

Es ist ferner $x = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2}$; daraus findet man, wenn man für y seinen Werth setzt und integrirt:

$$x = c' + c\left(\frac{3}{4p^4} + \frac{1}{p^2} + 1 + lp\right).$$

Aus der Verbindung dieser Gleichung mit $y = \frac{c(1+p^2)^2}{p^3}$ ergibt sich jene der gesuchten Curve.

§. 26. **Vierte Aufgabe.** Bei welcher Curve ABM (Fig. 7) ist der Flächenraum, den der Bogen, die den Endpunkten desselben entsprechenden Krümmungshalbmesser BO, MD und der Bogen OD der Evolute einschließen, ein Minimum? Das Element des Bogens AM ist $ds = dx\sqrt{(1+p^2)}$; der Krümmungshalbmesser MD ist $\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$. Das Produkt dieser Größen liefert für das Element des in Frage stehenden Flächenraums den Ausdruck:

$$\frac{(1+p^2)^2 dx}{q} = \frac{(dx^2+dy^2)^2}{dxd^2y}.$$

Es handelt sich jetzt darum, die Relation $y = fx$ aufzufinden, welche $\int U = \int \frac{(dx^2+dy^2)^2}{dx \cdot d^2y}$ zu einem Minimum macht. Man nehme zu diesem Behuf die Variation von $\int U$ und begnüge sich mit der zweiten der Gleichungen (d), welche für den vorliegenden Fall ausreicht; man findet so:

$$M = 0,\ N - dP = 4a,$$

$$N = \frac{dx^2+dy^2}{dx \cdot d^2y} \cdot 4dy = \frac{1+p^2}{q} \cdot 4p,\ P = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2 \cdot dx}.$$

Nun ist aber:

$$d\left(\frac{(1+p^2)^2}{q}\right) = Ndp + Pdqdx - 4adp + dPdp + Pdqdx,$$

indem man $4a + dP$ statt N schreibt. Mit Berücksichtigung, daß

$qdx = dp$ ist, verwandeln sich die beiden letztern Glieder in:

$$(qdP + Pdq)dx = d(Pq)dx = -d\left(\frac{(1+p^2)^2}{q}\right).$$

Folglich durch Integration: $\frac{(1+p^2)^2}{2q} = ap + b$, woraus:

$$q = \frac{(1+p^2)^2}{2(ap+b)} = \frac{dp}{dx},\ dx = \frac{2(ap+b)dp}{(1+p^2)^2};$$

hieraus durch eine zweite Integration:

$$x = c + \frac{bp-a}{1+p^2} + b \cdot \text{arc}\,(\text{tang} = p).$$

Ferner ist: $y = \int pdx = px - \int xdp$, oder:

$$y = px - cp - \int \frac{bp-a}{1+p^2}\,dp - \int bdp\ \text{arc}\,(\text{tang} = p).$$

Indem man das letzte Glied theilweise integrirt, entsteht:

$$y = px - cp - (bp - a)\ \text{arc}\,(\text{tang} = p) + f.$$

Wenn man den Bogen (tang $= p$) vermittelst der Werthe von x und y eliminirt, bekommt man:

$$by = a(x-c) + \frac{(bp-a)^2}{1+p^2} + bf,$$

$$\sqrt{(by - ax + g)} = \frac{(bp-a)\,dx}{ds},\ ds = \frac{bdy - adx}{\sqrt{(by - ax + g)}},$$

endlich: $s = 2\sqrt{(by - ax + g)} + h$.

Diese Gleichung gehört einer Cycloide an, deren vier Constanten nach einer gleich großen Anzahl gegebener Bedingungen zu bestimmen sind.

§. 27. Fünfte Aufgabe. Man soll die Funktion $\int \frac{ds}{\sqrt{(z-h)}}$, wo s ein Curvenbogen oder $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ist, zu einem Minimum machen. Diese Aufgabe ist die, wo es sich darum handelt, die Curve AC′ (Fig. 5.) zu bestimmen, nach welcher ein Körper fallen muß, um in der möglich kürzesten Zeit von einem Punkte C′ zu einem andern A zu gelangen. Nimmt man die Variation, so bekommt man:

$$n = -\frac{ds}{2\sqrt{(z-h)^3}},\ n = \frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}},\ N = \frac{dy}{ds\sqrt{(z-h)}},\ v = \frac{dz}{ds\sqrt{(z-h)}};$$

die übrigen Coefficienten m, M, P . . . sind Null. Für unsere Bedingungsgleichungen finden wir:

$$d\left(\frac{dx}{ds\sqrt{(z-h)}}\right)=0,\ d\left(\frac{dy}{ds\sqrt{(z-h)}}\right)=0 \ldots (1);$$

die dritte Gleichung ist hier weggelassen worden, weil sich nachweisen läßt, daß sie in den beiden andern enthalten ist, eine Bedingung, ohne welche das vorgelegte Problem ungereimt sein würde. Integrirt man und dividirt dann die Resultate durch einander, so erhält man $dy=adx$, woraus folgert, daß die Projection der Curve auf der Ebene xy eine Gerade, mithin diese Curve in einer auf der xy senkrechten Ebene liegt. Nimmt man diese Ebene als jene der xz an, so ist die erste der Gleichungen (1) hinreichend und man hat $kdx=ds\sqrt{(z-h)}$. Hieraus entspringt $dx=\frac{dz\sqrt{(z-h)}}{\sqrt{(k^2+h-z)}}$, da $ds^2=dx^2+dz^2$ ist. Setzt man $z=k^2+h-u$, so erkennt man sofort, daß diese Gleichung einer Cycloide angehört, deren Durchmesser des Erzeugungskreises $=k^2$ ist.

1. Sind die Grenzen zwei feste Punkte A und C', so hat man weiter keine andere Bedingung zu erfüllen, als die Cycloide durch jene zwei Punkte gehen zu lassen, wodurch die Werthe der Constanten k und h bestimmt werden.

2. Wenn die zweite Grenze ein festgesetzter Punkt C' ist und die erste eine mit diesem Punkte in der Verticalebene xz liegende Curve AB abgibt, so hat man:

$$\delta x_{,,}=\delta z_{,,}=0, \text{ und } L_{,}=\frac{dx_{,}}{ds_{,}\sqrt{(z_{,}-h)}}\,\delta x_{,}+\frac{dz_{,}}{ds_{,}\sqrt{(z_{,}-h)}}\,\delta z_{,}.$$

Es reicht hin, $L_{,}$ gleich Null zu setzen, indem man auf die erste Grenze achtet, welche eine durch die gegebene Gleichung $x_{,}=fz_{,}$ dargestellte Curve ist. Man entnimmt daraus $\delta x-A\delta z_{,}=0$; multiplicirt man mit λ und addirt zu $L_{,}$, so entstehen die zwei Gleichungen:

$$\frac{dx_{,}}{ds_{,}\sqrt{(z_{,}-h)}}+\lambda=0,\quad \frac{dz_{,}}{ds_{,}\sqrt{(z_{,}-h)}}-A\lambda=0.$$

Wird λ eliminirt, so erhält man $dz_{,}+Adx_{,}=0$: Die Cycloide muß demnach die gegebene Curve AB unter einem rechten Winkel schneiden; die Constante wird bestimmt, indem man die Gleichung der Cycloide mit der vorhergehenden zusammenstellt.

3. Man wird bei drei Dimensionen zu der nämlichen Folgerung gelangen, so daß die Curve des schnellsten Falles von irgend einer Curve CD (Fig. 6) zu einer andern AB eine auf diesen Curven normal stehende Cycloide A′C′ ist. Dasselbe findet statt, wenn die beiden Grenzen auf zwei krummen Flächen liegen, wovon man sich leicht überzeugen kann.

4. Soll die Curve auf einer gegebenen Fläche, deren Gleichung $u=0$ ist, gezogen werden, so läßt sich unsere Bedingungsgleichung nicht eher in drei zerlegen, als bis man das Glied $\lambda\delta u$ hinzugefügt hat. Man erhält dann drei Relationen, aus denen sich durch die Elimination von λ die Gleichungen der gesuchten Curven ergeben. Wären die Grenzen zwei feste Punkte, so würde man die Constanten der Bedingung gemäß bestimmen, daß die Curve durch diese zwei Punkte gehe. Hätte man dagegen zu jenen Grenzen zwei Curven, so müßte die gesuchte Linie jenen beiden unter einem rechten Winkel begegnen.

Anmerkung. Die hier behandelte Aufgabe wurde zuerst in den Actio eruditorum des Jahres 1696 den damaligen Mathematikern von Johann Bernoulli, der sie Brachystochrone nannte, zur Auflösung vorgelegt. Im nächstfolgenden Jahre erschienen außer seiner eigenen Auflösung noch jene von Newton, Leibnitz, Jakob Bernoulli und von l'Hôspital. Dies war das erste Problem aus der Klasse der absoluten Maxima und Minima.

§. 28. Sechste Aufgabe. Die Fläche zu bestimmen, deren Flächeninhalt zwischen gegebenen Grenzen ein Minimum darbietet. Für die verlangte Fläche muß die Variation des Integrals:

$$\iint dxdy\sqrt{(1+p^2+p'^2)} \text{ gleich Null werden.}$$

Dieses Integral mit dem im §. 13. vorkommenden Ausdrucke verglichen, liefert blos:

$$P=\frac{p}{\sqrt{(1+p^2+p'^2)}},\ P'=\frac{p'}{\sqrt{(1+p^2+p'^2)}},$$

indem die übrigen Coefficienten L, M, N, Q . . . sämmtlich Null sind. Der mit dem doppelten Integralzeichen versehene Theil gibt uns die Gleichung:

$$\frac{dP}{dx}+\frac{dP'}{dy}=0 \text{ oder } (1+p'^2)q-2pp'q'+(1+p^2)q''=0$$

als Differentialgleichung der gesuchten Fläche.

Das zweite Integral davon wird zwei willkührliche Funktionen enthalten, welche den durch die Grenzgleichungen ausgesprochenen Bedingungen gemäß zu bestimmen sind. Aus der auf der Seite 332 der Differentialrechnung stehenden Formel haben wir aber für die Summe des größten und kleinsten Krümmungshalbmessers den Werth:

$$\frac{[(1+p^2)q''-2pp'q'+(1+p'^2)q]}{q'^2-qq''}\sqrt{(1+p^2+p'^2)}.$$

Indem man diesen Ausdruck mit der vorhergehenden Gleichung zusammenhält, ergibt sich, daß die Krümmungen der Hauptschnitte unserer Fläche in jedem Punkte derselben gleich und entgegengesetzt sind.

§. 29. Siebente Aufgabe. Unter allen durch zwei gegebene Punkte B und M (Fig. 8) gehenden gleich langen Curven diejenige zu finden, welche mit der Abscissenachse und den Grenzordinaten BC, PM den größten oder kleinsten Flächenraum einschließt. Es soll mithin $\int y dx$ innerhalb gewisser Grenzen ein Größtes oder Kleinstes sein, während $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ in Bezug auf dieselben Grenzen constant ist. Dies wird erreicht, wenn die Variation des Ausdruckes:

$$\int y dx+\lambda\int\sqrt{(dx^2+dy^2)},$$

wobei λ eine Constante ist, verschwindet. Wir haben also die Gleichung:

$$\int\left(y\cdot\delta dx+dx\cdot d\delta y+\frac{\lambda dx\cdot\delta dx+\lambda dy\cdot\delta dy}{ds}\right)=0,$$

woraus als Bedingungsgleichungen für das Maximum oder Minimum:

$$y+\lambda\frac{dx}{ds}=c,\quad x-\lambda\frac{dy}{ds}=c'.$$

Diese Gleichungen sind identisch, da sie eine wie die andere bei der Integration zu demselben Resultate führen, weshalb man λ nicht eliminiren darf. Die erste liefert:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{[\lambda^2-(y-c)^2]}}{y-c},\text{ woraus }(x-c')^2+(y-c)^2=\lambda^2.$$

Die gesuchte Curve ist folglich ein Kreis; je nachdem er seine Convexität oder Concavität der Achse der x zusendet, ist der Flächeninhalt ein Minimum oder Maximum. Dabei werden die zwei Constanten c und c'

der Integration aus der Bedingung bestimmt, daß der Kreis durch die zwei Punkte B und M geht, die Constante λ hingegen aus der Anforderung, daß der Bogen BM die vorgeschriebene Länge erhält. Dieses ist die einfachste unter den isoperimetrischen Aufgaben.

§. 30. Achte Aufgabe. Für welche Curve wird der Bogen BM (Fig. 8) ein Minimum, während der Flächeninhalt BCMP einen unveränderten Werth A behält. Man hat hier $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$ Minimum, unter der Bedingung, daß $\int ydx=A$. Indem man wie vorhin verfährt, bekommt man:

$$\frac{dy}{ds}+\lambda y=c,\ \lambda x-\frac{dy}{ds}=c',$$

woraus hervorgeht, daß der Kreis abermals die gesuchte Curve ist.

§. 31. Neunte Aufgabe. Die Curve MK (Fig. 4) zu finden, welche die kürzeste unter allen ist, wenn der zwischen zwei Leitstrahlen AM, AK enthaltene Flächenraum als gegeben angesehen wird. Man hat $s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$ Minimum, unter der Bedingung, daß $\int\frac{1}{2}(xdy-ydx)=$ Constant ist. Man erhält hieraus:

$$\frac{dx\cdot\delta dx+dy\cdot\delta dy}{ds}+\tfrac{1}{2}\lambda(dy\cdot\delta x+x\delta dy-dx\delta y-y\cdot\delta dx)=0;$$

$$\tfrac{1}{2}\lambda dy-d\left(\frac{dx}{ds}-\tfrac{1}{2}\lambda y\right)=0,\ \tfrac{1}{2}\lambda dx+d\left(\frac{dy}{ds}+\tfrac{1}{2}\lambda x\right)=0.$$

Diese Gleichungen sind unter einander übereinstimmend; man braucht daher nur eine zu integriren, was gibt:

$$\lambda y+c=\frac{dx}{ds}\ \text{oder}\ (\lambda y+c)\,dy=dx\sqrt{[1-(\lambda y+c)^2]}.$$

Indem man $\lambda y+c=z$ setzt, wird die Integration leicht und man findet: $(\lambda x+b)^2+(\lambda y+c)^2=1$, oder auch $(x+b')^2+(y+c')^2=K^2$. Die gesuchte Curve ist daher ein Kreis, von dem gefordert wird, daß er durch die Punkte M und K geht und den gegebenen Flächeninhalt MAK einschließt.

§. 32. Zehnte Aufgabe. Unter allen durch zwei gegebene Punkte M und K gehenden, gleichlangen Curven diejenige zu suchen, deren Flächenraum MAK ein Maximum ist. Man findet, daß der Kreis der Aufgabe Genüge thut.

§. 33. **Elfte Aufgabe.** Unter allen durch zwei Ordinaten BC, PM (Fig. 8) begrenzten, ebenen Curven, die durch Rotation Körper von gleicher Oberfläche erzeugen, diejenige zu finden, welche das größte Volumen hervorbringt. Man hat $\int \pi y^2 dx =$ Maximum, und $\int 2\pi y \sqrt{(dx^2+dy^2)} =$ Constante. Hieraus leitet man leicht ab:

$$\frac{2\lambda y dx}{ds} + y^2 = c, \quad y dx + \lambda ds = d\left(\frac{\lambda y dy}{ds}\right).$$

Von diesen unter einander übereinstimmenden Gleichungen liefert die erste:

$$dx = \frac{(c-y^2)dy}{\sqrt{[4\lambda^2 y^2 - (c-y^2)]}} \quad \ldots (1)$$

Insofern die Constante $c=0$ ist, findet man:

$$dx = \frac{-y dy}{\sqrt{(4\lambda^2 - y^2)}}, \text{ woraus } (x-b)^2 + y^2 = 4\lambda^2.$$

Es ist dies die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in irgend einem Punkte der Achse der x liegt und der durch die zwei gegebenen Punkte geben muß. Uebrigens entspricht dieser Kreis nur dann der Aufgabe, wenn der durch die Umdrehung des Bogens BM erzeugte Flächeninhalt die verlangte Ausdehnung besitzt. Und in der That enthält die Integralgleichung nur zwei Constanten, welche der Bedingung gemäß zu bestimmen sind, daß die Linie durch die Punkte B und M geht. Die allgemeine Auflösung des Problems liefert die Gleichung (1).

§. 34. **Zwölfte Aufgabe.** Die zwischen zwei gegebenen Punkten gezogene Linie von gegebener Länge s zu bestimmen, für welche $\int y ds$ ein Maximum wird. Man findet leicht:

$$(y+\lambda)\frac{dx}{ds} = c, \text{ woraus } dx = \frac{c dy}{\sqrt{[(y+\lambda)^2 - c^2]}},$$

welche Gleichung der Kettenlinie angehört. Da $\frac{\int y ds}{s}$ die verticale Ordinate des Schwerpunktes eines Curvenbogens, dessen Länge s ist, darstellt; so sieht man, daß der Schwerpunkt irgend eines Bogens der Kettenlinie tiefer liegt als jener des Bogens jeder andern Curve, welcher durch dieselben Punkte begrenzt ist.

§. 35. **Dreizehnte Aufgabe.** Die Curve aufzufinden, für welche $\int y^2 dx =$ Minimum und $\int y dx =$ Constant ist. Man bekommt $y^2 + \lambda y = c$ oder vielmehr $y = c$, d. h. eine zur Achse der x parallel laufende

Gerade. Da $\frac{\int y^2 dx}{2\int y dx}$ die verticale Ordinate des Schwerpunktes jeder ebenen Fläche darstellt, so liegt der Schwerpunkt eines verticalen Rechtecks, dessen eine Seite horizontal ist, am tiefsten. Auf diese Weise hat jede Wassermasse, deren obere Fläche horizontal ist, ihren Schwerpunkt am tiefsten liegen.

§. 36. Vierzehnte Aufgabe. Unter allen durch zwei gegebene Punkte gehenden, ebenen Curven von gleicher Länge diejenige zu finden, welche bei der Umdrehung das größte Volumen oder den größten Flächeninhalt erzeugt. In beiden Fällen ist $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=$ Constante; außerdem muß in dem einen $\int\pi y^2 dx$ und in dem andern $\int 2\pi y ds$ ein Maximum sein. Für den ersten Fall findet man:

$$\pi y^2+\frac{\lambda dx}{ds}=c, \text{ woraus } dx=\frac{(c-\pi y^2)dy}{\sqrt{[\lambda^2-(c-\pi y^2)^2]}}.$$

Die in Frage stehende Curve besitzt die Eigenschaft, daß ihr Krümmungshalbmesser $\gamma=\frac{\lambda}{2\pi y}$ ist; denn in der That hat man:

$$y'=\sqrt{\left[\left(\frac{\lambda}{c-\pi y^2}\right)^2-;\right]}, \; y''=\frac{2\lambda^2\pi y}{(c-\pi y^2)^3}, \; s'=\frac{\lambda}{c-\pi y^2}.$$

Die Curve, deren Krümmungshalbmesser im umgekehrten Verhältnisse der Ordinate steht, heißt die elastische Linie. Außer c und λ hat man noch eine dritte Constante, welche drei Constanten der Bedingung gemäß bestimmt werden, daß die Curve durch zwei gegebene Punkte geht und die geforderte Länge hat.

Für den zweiten Fall bekommt man:

$$\frac{2\pi y dx+\lambda dx}{ds}=c, \text{ woraus } dx=\frac{c dy}{\sqrt{[(2\pi y+\lambda)^2-c^2]}}.$$

Die gesuchte Curve ist eine Kettenlinie mit horizontaler Achse; es findet ein Maximum oder Minimum statt, je nachdem die Linie ihre Concavität oder Convexität der Achse der x zuwendet.

Anmerkung. Anderweitige Probleme zur Anwendung der Variationsrechnung bieten dem Leser:
das klassische Werk von Euler, nämlich: Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes;
ferner: G. Strauch's Beiträge zum Variationscalcul in dem

dritten und vierten Theil des von Grunert herausgegebenen „Archiv für Mathematik und Physik.“ Es wäre zu wünschen, daß der Verfasser die hier mitgetheilten Aufgaben dem mathematischen Publikum in einem besondern Werke vorlegte, und zwar in der Art, daß solches, Beispiele über die Lehren der Integral- und Variationsrechnung enthaltend, als eine Fortsetzung seiner vor einigen Jahren erschienenen trefflichen Beispielsammlung zur Differentialrechnung angesehen werden könnte.

Zweites Kapitel.

Direkte Differenzenrechnung.

Von den Differenzen der Funktionen einer Variabeln.

§. 37. Wenn man in einer Reihe oder auch nur in einer bloßen Folge von Größen, deren Glieder wir durch a, b, c, d ... bezeichnen wollen, jedes einzelne Glied von dem unmittelbar darauf folgenden abzieht; so entsteht eine neue Folge von Größen a', b', c', d', ..., welche die erste Differenzreihe heißt, wobei nämlich:

$$a' = b - a,\quad b' = c - b,\quad c' = d - c\ \dots \text{ ist.}$$

Verfährt man mit dieser Differenzreihe auf dieselbe Art, so entspringt die zweite Differenzreihe a'', b'', c'', d'' ..., wobei $a'' = b' - a'$, $b'' = c' - b'$, $c'' = d' - c'$ ... ist.

Auf analoge Weise fortgefahren wird man so die dritte, vierte, ... Differenzreihe ableiten.

Die Differenzen werden durch das Zeichen Δ dargestellt, indem man demselben einen Exponenten beisetzt, um damit die Ordnung der Differenz auszudrücken: hiernach wäre Δ^n ein Glied der nten

Differenzreihe. Uebrigens behält jede Differenz ihr Zeichen bei, das negativ ausfällt, wenn man sie aus einer abnehmenden Reihe herleitet.

Die Funktion $y=x^3-9x+6$ z. B. gibt eine Reihe von Zahlen, deren allgemeines Glied y ist. Aus denselben entspringen nachstehende Differenzreihen:

für	$x=0,$	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7	....
Hauptreihe	$y=6,$	−2,	−4,	6,	34,	86,	168,	286	....
Erste Differenzreihe	$\Delta y=$	−8,	−2,	10,	28,	52,	82,	118	....
Zweite Differenzreihe	$\Delta^2 y=$		6,	12,	18,	24,	30,	36	....
Dritte Differenzreihe	$\Delta^3 y=$			6,	6,	6,	6,	6	....

§. 38 Man sieht, daß die dritten Differenzen hier constant sind und die zweiten Differenzen eine arithmetische Progression von der ersten Ordnung bilden. Man gelangt überhaupt jederzeit zu solchen constanten Differenzen, wenn y eine rationale und ganze Funktion von x ist, was wir jetzt nachweisen wollen.

Macht man nämlich in dem Monom cx^m successive: $x=\alpha$, β, γ, δ .... k, λ, welche Zahlen die constante Differenz h haben; so bekommt man die Reihe:

$$c\alpha^m,\ c\beta^m,\ c\gamma^m,\ \ldots\ ck^m,\ c\lambda^m.$$

Indem man nun $ck^m=c(\lambda-h)^m$ entwickelt und die Binomialcoefficienten durch m, A', A'', ... darstellt, findet man:

$$c(\lambda-h)^m-c\lambda^m=cmh\lambda^{m-1}-cA'h^2\lambda^{m-2}+cA''h^3\lambda^{m-3}+ \text{ꝛc.}.$$

welcher Ausdruck der ersten Differenz zwischen zwei beliebigen Gliedern der Reihe $c\alpha^m$, $c\beta^m$, $c\gamma^m$ .... angehört. Die Differenz zwischen den vorhergehenden Gliedern oder $c(k^m-\vartheta^m)$ ergibt sich aus dem vorigen Ausdrucke, wenn man darin λ mit k und k mit ϑ vertauscht, wobei, wegen $k=\lambda-h$, man $\lambda-h$ statt λ in dem zweiten Theile zu setzen hat, der hiernach:

$$=cmh(\lambda-h)^{m-1}-cA'h^2(\lambda-h)^{m-2}\ \ldots$$
$$=cmh\lambda^{m-1}-[A'+m(m-1)]ch^2\lambda^{m-2}+ \text{ꝛc. ist.}$$

Indem man diese Resultate von einander abzieht, verschwinden die beiden ersten Glieder und es entsteht für die zweite Differenz an einer beliebigen Stelle der Ausdruck:

$$cm(m-1)h^2\lambda^{m-2}-CB'h^3\lambda^{m-3}+ \text{ꝛc.}$$

Aendert man wieder in dieser letzten Entwickelung λ in $\lambda-h$ um, zieht dann das zweite Resultat von dem erstern ab, so verschwinden abermals die beiden ersten Glieder und man erhält für die dritte Differenz einen Ausdruck von der Form:

$$cm(m-1)(m-2)h^3\lambda^{m-3}-cB''h^4\lambda^{m-4}\ \ldots\ .$$

Indem man dies Verfahren weiter fortsetzt, erhält man die Differenzen der verschiedenen Ordnungen, von denen jede in ihrer Entwickelung ein Glied weniger als jene der vorhergehenden Ordnung besitzt: die erste Differenz hat m, die zweite $m-1$, die dritte $m-2$ Glieder, u. s. w. Das Gesetz der ersten Glieder in jeder dieser Entwickelungen ist einleuchtend, und man sieht, daß sich der Ausdruck für die $m$te Differenz auf die constante Größe:

$$m(m-1)(m-2)\ \ldots\ 2\cdot 1ch^m$$

reducirt, mithin die höheren Differenzen nothwendig Null sind.

In Folge dieser Eigenschaft eines Monoms cx^m wird bei jeder rationalen und ganzen Function von x diejenige Differenz, deren Ordnung durch den Exponenten der höchsten in der Funktion vorkommenden Potenz von x angezeigt ist, sich jederzeit constant herausstellen. Denn für eine solche Funktion:

$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+$ ꝛc. erhält man: $\Delta^m(Ax^m+Bx^{m-1}+$ ꝛc.$)$

$$A\Delta^m x^m+B\Delta^m x^{m-1}+C\Delta^m x^{m-2}+ \text{ꝛc.}$$

$$=1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ mAh^m,\ \text{da}\ \Delta^m x^{m-1}=\Delta^m x^{m-2}\ \ldots = 0.$$

§. 39. Hat man in einer rationalen und ganzen Funktion von x statt der Unbekannten nach und nach Zahlen zu substituiren, welche um eine und dieselbe Differenz von einander verschieden sind, wie dies z. B. bei der Auflösung der numerischen Gleichungen der Fall ist; so kann man sich mit Vortheil der Differenzen bedienen, um die Reihe von jenen Zahlen, deren Gesetz in der vorliegenden Funktion ausgesprochen wird, so weit man nur immer will, fortzusetzen. Es ist zu diesem Behufe hinreichend, die $(m+1)$ ersten Resultate aufzusuchen und daraus die ersten, zweiten .... Differenzen abzuleiten. Da die $m$te Differenz, welche nur ein Glied hat und gleich $1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ kh^m$ wird, wenn kx^m das erste Glied der Gleichung ist; so kann man die $m$te Differenzreihe nach Willkühr verlängern. Durch successive Additionen läßt sich dann die $(m-1)$te Differenzreihe jenseits der beiden gefundenen Glieder beliebig weiter fortsetzen, worauf

die (m—2)te Differenzreihe weiter fortgeführt werden kann, und so fort bis zur ursprünglichen Reihe, d. h. der Aufeinanderfolge der durch jene Substitutionen hervorgegangenen Resultate.

Für $x^3 - x^2 - 2x + 1$ z. B. gibt:

	x=0, 1, 2, 3
die Resultate:	1, —1, 1, 13
erste Differenzen:	—2, 2, 12
zweite Differenzen:	4, 10
dritte Differenzen:	6

Hiernach 3te Differenzreihe:	6,	6,	6,	6,	6,	6,	6	. . .
2te Differenzreihe:	4,	10,	16,	22,	28,	34,	40	. . .
1te Differenzreihe:	—2,	+2,	12,	28,	50,	78,	112	. . .
Hauptreihe:	1,	—1,	1,	13,	41,	91,	169	. . .
für	x=0,	1,	2,	3,	3,	5,	6	. . .

Diese Reihen werden aus jener, deren Glieder sämmtlich 6 sind, und aus den für jede Reihe schon gefundenen Anfangsgliedern hergeleitet, indem man irgend ein Glied dadurch erhält, daß man die zu seiner Linken stehende Zahl zu derjenigen Zahl addirt, welche sich über dieser letztern befindet. Man kann die Reihen auch im entgegengesetzten Sinne fortsetzen, um die dem x=—1, — 2, —3 . . . entsprechenden Resultate zu bekommen. Man erhält alsdann ein Glied, indem man die über demselben befindliche Zahl von derjenigen abzieht, welche zur Rechten des fraglichen Gliedes steht.

Handelt es sich darum eine Gleichung aufzulösen, so ist es überflüssig, die Reihe der Resultate über dasjenige Glied auszudehnen, von welchem man nur Zahlen mit einerlei Vorzeichen bekommt. Dies trifft jedesmal zu, wenn sämmtliche Glieder irgend einer Columne positiv auf der linken, und abwechselnd positiv und negativ auf der rechten Seite sind, weil die Additionen und Subtractionen, mittelst deren die Reihen verlängert werden, stets mit einerlei Vorzeichen behaftete Resultate liefern. Man erhält demnach auf diesem Wege die Grenzen sowohl der positiven als negativen Wurzeln.

§. 40. Die Art, wie die Differenz der Potenz x^m gefunden worden ist, läßt sich auch auf die Potenzen ausdehnen, bei denen m

eine negative oder gebrochene Zahl bedeutet. Wir wollen hier die ersten Differenzen der einfachsten von diesen Potenzen hersetzen.

$$1)\ \Delta\frac{1}{x}=\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}=\frac{\Delta x}{(x+h)x}=-\frac{h}{x^2}+\frac{h^2}{x^3}-\frac{h^3}{x^4}+\text{etc.}$$

$$2)\ \Delta\frac{1}{x^2}=\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}=\frac{\Delta x^2}{(x+h)^2x^2}=-\frac{2h}{x^3}+\frac{3h^2}{x^4}-\frac{4h^3}{x^5}+\text{etc.}$$

$$3)\ \Delta x^{\frac{1}{2}}=(x+h)^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}=\frac{h}{2x^{\frac{1}{2}}}-\frac{h^2}{8x^{\frac{3}{2}}}+\frac{h^3}{16x^{\frac{5}{2}}}+\text{etc.}$$

$$4)\ \Delta x^{\frac{1}{3}}=(x+h)^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}=\frac{h}{3x^{\frac{2}{3}}}-\frac{h^2}{9x^{\frac{5}{3}}}+\frac{5h^3}{81x^{\frac{8}{3}}}+\text{etc.}$$

Man sieht hieraus, daß die Differenzen von Potenzen mit negativen oder gebrochenen Exponenten aus einer unbegrenzten Anzahl von Gliedern bestehen, obschon sie sich auch durch endliche Ausdrücke darstellen lassen.

§. 41. Die Aufsuchung der Differenzen für die transcendenten Funktionen bietet keine weitere Schwierigkeiten dar.

Die Differenzen der Funktion a^x haben alle eine und dieselbe, durch ihre Einfachheit bemerkenswerthe Form. Man erhält nämlich der Reihe nach:

$$\Delta a^x = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1);$$

$$\Delta^2 a^x = (a^h - 1)\,\Delta a^x = a^x(a^h - 1)^2;$$

und allgemein $\Delta^n a^x = a^x(a^h - 1)^n$.

Für $y=\log x$ bekommt man:

$$y_1=\log(x+h),\ y_2=\log(x+2h),\ y_3=\log(x+3h).$$

Hieraus folgt in irgend einem System:

$$\Delta \log x=\log(x+h)-\log x=\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=$$

$$m\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\text{etc.}\right).$$ (Siehe höhere Algebra §. 176).

$$\Delta^2\log x=\log(x+2h)-2\log(x+h)+\log x.$$

$$=\log\left(1+\frac{2h}{x}\right)-2\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=-m\left(\frac{h^2}{x^2}-\frac{2h^3}{x^3}+\text{etc.}\right).$$

$$\Delta^3 \log x = \log(x+3h) - 3\log(x+2h) + 3\log(x+h) - \log x$$
$$= \log\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3\log\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$
$$= m\left(\frac{2h^3}{x^3} - \text{rc.}\right).$$

Mit welchem Vortheile man sich bei den transcentenden Funktionen, deren genäherte Berechnung mühsam ist, der Differenzen bedienen könne, wird folgendes auf die Logarithmen Bezug habende Beispiel zeigen.

Hat man z. B. $\log 10000 = y$, und $h = 1$; so findet man für die gewöhnlichen Logarithmen:

$$\Delta y = 0{,}0000\ 4\ 34272\ 76863;$$
$$\Delta^2 y = -0{,}0000\ 0\ 00043\ 42076;$$
$$\Delta^3 y = 0{,}000000000000868.$$

Man nehme nun die dritte Differenzreihe aus gleichen Gliedern bestehend an, was hier, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, geschehen darf, und bilde hierauf die Colonnen der dritten, zweiten und ersten Differenzen und endlich die Logarithmen der Zahlen 10001, 10002 u. s. w., wobei man von dem Logarithmen von 10000, welcher 4 ist, ausgeht. Die so durch fortgesetzte aufeinander folgende Additionen gewonnenen Logarithmen müssen von Zeit zu Zeit geprüft werden, was dadurch geschieht, daß man in gewissen Entfernungen von einander liegende Logarithmen strenge berechnet und diese mit den Resultaten der Differenzmethode vergleicht und sieht, ob gedachte zwei Zahlenwerthe in den beizubehaltenden Decimalstellen übereinstimmen oder nicht. In dem letztern Falle berechnet man wieder a priori die Differenzen Δ, Δ^2, Δ^3 und benutzt dann diese neue Werthe gerade so, wie die vorhergehenden, zur Bestimmung der Logarithmen derjenigen ganzen Zahlen, welche auf diejenige folgen, bei der man stehen bleiben mußte.

§. 42. Für die transcendenten Funktionen $\sin x$, $\cos x$ haben wir:

$$\Delta \sin x = \sin(x+h) - \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}h\cos\tfrac{1}{2}(2x+h);$$
$$\Delta \cos x = \cos(x+h) - \cos x = -2\sin\tfrac{1}{2}h\sin\tfrac{1}{2}(2x+h);$$

hieraus $\Delta^2 \sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}h\left[\cos\tfrac{1}{2}(2x+3h) - \cos\tfrac{1}{2}(2x+h)\right]$

$$= -4(\sin\tfrac{1}{2}h)^2 \sin(x+h).$$

Indem so weiter fortgefahren wird, gelangt man zu folgenden allgemeinen Formeln:

$$\Delta^{4i} \sin x = 2^{4i}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i}\sin\tfrac{1}{2}(2x+4ih);$$
$$\Delta^{4i+1}\sin x = 2^{4i+1}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i+1}\cos\tfrac{1}{2}[2x+(4i+1)h];$$
$$\Delta^{4i+2}\sin x = -2^{4i+2}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i+2}\sin\tfrac{1}{2}[2x+(4i+2)h];$$
$$\Delta^{4i+3}\sin x = -2^{4i+3}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{4i+3}\cos\tfrac{1}{2}[2x+(4i+3)h];$$

Ebenso findet man:

$$\Delta^{2n} \cos x = \pm 2^{2n}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{2n}\cos(x+nh).$$
$$\Delta^{2n+1}\cos x = \mp 2^{2n+1}(\sin\tfrac{1}{2}h)^{2n+1}\sin[x+(n+\tfrac{1}{2})h];$$

wo die obern Zeichen zu nehmen sind, wenn n eine gerade Zahl, die untern hingegen, wenn n ungerade ist.

§. 43. Der allgemeine Ausdruck

$y_2 = y_1 + \Delta y_1 = y_1 + \Delta y + \Delta^2 y$, weil $\Delta y_1 - \Delta y = \Delta^2 y$, gibt uns:

$$\sin(x+2h) = \sin(x+h) + [\sin(x+h) - \sin x] - \sin(x+h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2,$$

wenn man statt $\Delta^2 \sin x$ den im vorhergehenden Paragraphen angegebenen Werth einführt.

Diese Formel ist zur Aufstellung einer Sinustafel recht bequem; denn macht man nach und nach $x=0^0$, $x=1^0$, $x=2^0$ u. s. w. und nimmt $h=1^0$; so kommt:

$$\sin 2^0 = \sin 1^0 + (\sin 1^0 - \sin 0^0) - \sin 1^0(2\sin 30')^2;$$
$$\sin 3^0 = \sin 2^0 + (\sin 2^0 - \sin 1^0) - \sin 2^0(2\sin 30')^2;$$
$$\sin 4^0 = \sin 3^0 + (\sin 3^0 - \sin 2^0) - \sin 3^0(2\sin 30')^2 \text{ u. s. w.}$$

wobei man mittelst der Reihe

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} + \text{ꝛc.}$$

blos den Sinus von 30′ und den von 1⁰, für welche diese Reihe sehr convergent ist, zu berechnen nöthig hat. Zur Prüfung der gefundenen Werthe hat man folgende Sinus:

$$\sin 15^0 = \sqrt{\tfrac{3}{8}} - \sqrt{\tfrac{1}{8}},\ \sin 18^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} - \tfrac{1}{4},\ \sin 30^0 = \tfrac{1}{2},$$
$$\sin 45^0 = \sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sin 54^0 = \tfrac{1}{4}\sqrt{5} + \tfrac{1}{4},\ \sin 60^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Setzt man $x-1'$, $x-10''$ statt x in die Formel:

$$\sin(x+2h) = \sin(x+h) + [\sin(x+h) - \sin x] - \sin(x+h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2,$$

und macht $h=1'$, $h=10''$; so erhält man folgende zwei Formeln:

$$\sin(x+1') = \sin x + [\sin x - \sin(x-1')] - \sin x(2\sin 30'')^2,$$
$$\sin(x+10'') = \sin x + [\sin x - \sin(x-10'')] - \sin x(2\sin 5'')^2,$$

welche zur Berechnung der Sinus von Minute zu Minute und von zehn Sekunden zu zehn Sekunden dienen, nachdem vorerst mittelst der Reihe $\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} +$ &c. die Werthe von $\sin 1'$ und $\sin 30''$ und jene von $\sin 10''$ und $\sin 5''$ gefunden sind. Die hier in Anwendung gebrachte Formel läßt sich folgendermaßen umkehren:

$$\sin x = \sin(x+h) - [\sin(x+2h) - \sin(x+h)] - \sin(x+h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2,$$

und verwandelt sich, wenn $x-2h$ statt x gesetzt wird, in:

$$\sin(x-2h) = \sin(x-h)[-(\sin x - \sin(x-h)] - \sin(x-h)(2\sin\tfrac{1}{2}h)^2,$$

unter welcher Gestalt sie nach und nach die Sinus, von 90^0 an gegen 0^0 zu gehend, liefert.

Anmerkung. Aus allem dem, was bis jetzt über die Differenzen gesagt worden ist, ergibt sich, daß die erste Differenz Δy einer jeden algebraischen oder transcendenten Funktion y von x von der Form $Ah + A'h^2 + A''h^3 +$ &c. ist, wo A, A', A'' ... gewisse Funktionen von x sind, die zweite Differenz $\Delta^2 y$ von der Form $Bh^2 + B'h^3 + B''h^4 +$ &c. ist, wo B, B', B'' .... abermals gewisse Funktionen von x darstellen.

§. 44. In der Folge wollen wir durch y_x die Funktion von x darstellen, welche das allgemeine Glied einer vorgelegten Reihe ist und alle Glieder derselben erzeugt, wenn man nach und nach $x=0$, 1, 2, 3 . . . setzt. So z. B. deutet y_5 den Werth an, welche die Funktion erhält, wenn man darin $x=5$ macht, oder dasjenige Glied berücksichtigt, welchem fünf vorangehen: in dem besondern Beispiele des Paragraphen 39 wird 91 dieser Zahlenwerth sein.

Auf solche Weise haben wir:

$$y_1 - y_0 = \Delta y_0,\ y_2 - y_1 = \Delta y_1,\ y_3 - y_2 = \Delta y_2 \ldots;$$
$$\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta^2 y_0,\ \Delta y_2 - \Delta y_1 = \Delta^2 y_1,\ \Delta y_3 - \Delta y_2 = \Delta^2 y_2 \ldots;$$
$$\Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = \Delta^3 y_0,\ \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 = \Delta^3 y_1,\ \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2 = \Delta^3 y_2 \ldots.$$

Im Allgemeinen $y_x - y_{x-1} = \Delta y_{x-1}$;

$$\Delta y_x - \Delta y_{x-1} = \Delta^2 y_{x-1};$$

$$\Delta^2 y_x - \Delta^2 y_{x-1} = \Delta^3 y_{x-1} \text{ u. s. w.}$$

§. 45. Bilden wir die Differenzen der verschiedenen Ordnungen irgend einer Reihe $a, b, c, d, e \ldots$, und stellen, wie schon geschehen, die ersten Differenzen Δ' durch $a', b', c', d', \ldots$, die zweiten Differenzen Δ^2 durch $a'', b'', c'', d'' \ldots$, die dritten Differenzen Δ^3 durch $a''', b''', c''' \ldots$ dar; so haben wir:

$$b = a + a',\ c = b + b',\ d = c + c',\ \ldots;$$

$$b' = a' + a'',\ c' = b' + b'',\ d' = c' + c''\ \ldots;$$

$$b'' = a'' + a''',\ c'' = b'' + b''',\ d'' = c'' + c'''\ \ldots;$$

$$b''' = a''' + a^{VI},\ c''' = b''' + b^{IV},\ d''' = c''' + c^{IV}\ \ldots; \text{ u. s. w.}$$

Durch die Elimination der Größen $b, b', c, c' \ldots$ aus den Gleichungen der ersten Linie ergibt sich:

$$b = a + a',\ c = a + 2a' + a'',\ d = a + 3a' + 3a'' + a''',$$

$$e = a + 4a' + 6a'' + 4a''' + a^{IV}, \text{ u. s. w.},$$

wo in den zweiten Theilen nur $a, a', a'', a''' \ldots$ vorkommen.

Da diese Anfangsglieder $a, a', a'', a''' \ldots$ mit $y_0, \Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0 \ldots$ und die Glieder $b, c, d \ldots$ mit y_1, y_2, y_3, gleichbedeutend sind; so hat man:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0,$$

$$y_4 = y_0 + 4\Delta y_0 + 6\Delta^2 y_0 + 4\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0; \text{ u. s. w.}$$

Die Form dieser Ausdrücke führt der Analogie nach zu:

$$y_x = y_0 + x\Delta y_0 + x\frac{(x-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 y_0 + x\frac{(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta^3 y_0 \ldots + (A)$$

oder zu $y_x = (1 + \Delta y_0)^x$, wofern man bei der Entwickelung die Exponenten der Potenzen von Δy_0 in Exponenten des Differenzzeichens Δ verwandelt. Vermittelst der Formel (A) erhält man irgend ein Glied y_x der Hauptreihe durch das erste Glied y_0 derselben und durch die ersten Glieder $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \Delta^3 y_0 \ldots$ der auf einander folgenden Differenzreihen.

Um eine Anwendung der Formel (A) zu geben, wollen wir das allgemeine Glied y_x für die Reihe 5, 9, 15, 23, 33 ... finden.

Man hat 4, 6, 8, 10 . . . als erste und 2, 2, 2 . . . als zweite Differenzreihe. Hieraus erhält man nach unserer Formel (A):

$$y_x = 5 + 4x + x^2 - x = 5 + 3x + x^2.$$

Anmerkung. Denkt man sich in den Binomialfaktoren der Formel (A) die Multiplicationen ausgeführt und alles nach den Potenzen von x geordnet, so erhält man für das allgemeine Glied den Ausdruck von der Form:

$$y_x = y_0 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.}$$

§. 46. Man kann auch die Differenz von einer beliebigen Ordnung durch die Glieder der ursprünglichen Reihe ausdrücken. Es ist nämlich:

$$a' = b - a,\ a'' = c - 2b + a,\ a''' = d - 3c + 3b - a \ldots,$$

oder, wenn man die andere Bezeichnung wählt:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$
$$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0,$$
$$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0,$$
$$\Delta^4 y_0 = y_4 - 4y_3 - 6y_2 - 4y_1 + y_0 \text{ u. s. w.}$$

Folglich der Analogie nach:

$$\Delta^n y_0 = y_n - n y_{n-1} + n\frac{(n-1)}{1 \cdot 2} y_{n-2} \ldots \text{(B)}.$$

Man kann diese Formel auch durch

$$\Delta^n y_0 = (y-1)^n$$

darstellen, insofern man bei der Entwickelung alle dem Buchstaben y zu ertheilenden Exponenten demselben als Stellenzeiger unten anhängt.

Anmerkung. So wie $\Delta^n y_0$ aus y_n, $y_{n-1} \ldots y_0$ gebildet wird, entsteht auch $\Delta^n y_r$ aus y_{n+r}, $y_{n+r-1} \ldots y_r$, was man sofort einsieht, wenn man sich die ursprüngliche Reihe mit dem Gliede y_r anfangend vorstellt. Es ist demnach:

$$\Delta^n y_r = y_{n+r} - n y_{n+r-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_{n+r-2} \ldots + (-1)^n y_r,$$

oder $\Delta^n y_r = y_r (y-1)^n$,

wenn man bei der Entwickelung die Exponenten von y in Stellenzeiger verwandelt.

§. 47. Für die Reihe:

$$y=x^n,\ y_1=(x+h)^n,\ y_2=(x+2h)^n \ldots y_n=(x+nh)^n$$

geht unsere letzte Formel in:

$$\Delta^n x^n=(x+nh)^n-\frac{n}{1}[x+(n-1)h]^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}[x+(n-2)h]^n$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}[x+(n-3)h]^n+ \text{ꝛc.}$$

über. Der Ausdruck $\Delta^n x^n$ ist ganz unabhängig von x und immer gleich $n(n-1)(n-2) \ldots 1\cdot h^n$, welchen Werth auch x haben mag. Setzt man aber $x=0$ in der Reihe der Größen $y, y_1, y_2, \ldots y_n$; so findet man:

$$\Delta^n x^n=[n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot(n-2)^n-\text{ꝛc.}]\,h^n.$$

Folglich:

$$n^n-\frac{n}{1}(n-1)^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(n-2)^n-\text{ꝛc.}=1\cdot 2\cdot 3 \ldots . n.$$

Von den Differenzen der Funktionen mehrerer Veränderlichen.

§. 48. Was wir bisher von den Differenzen der Funktionen einer Variabeln entwickelt haben, läßt sich auch auf die Funktion u von mehrern Veränderlichen $x, y, z \ldots$ ausdehnen, von denen hier nur jene mit zwei Variabeln x, y näher betrachtet werden sollen. Den allgemeinen Zustand einer solchen Funktion u werden wir auf ähnliche Weise, wie bei jener mit einer Variabeln, durch $u_{x,y}$ darstellen. Hiernach bezeichnet $u_{0,0}$ der besondere Werth, welcher dem $x=0$ und $y=0$, und $u_{4,1}$ derjenige Werth, welcher dem $x=4$ und $y=1$ entspricht. Für die Funktion $u_{x,y}=5+x^2+2xy+3y^2$ z. B. ist:

$$u_{0,0}=5 \text{ und } u_{4,1}=62.$$

Bei dergleichen Funktionen von zwei Variabeln haben wir partielle und totale Differenzen zu unterscheiden. Die ersteren entstehen, wenn blos eine bestimmte Variable, z. B. x, verschiedene Werthe annimmt, während die andere y ihren vorigen Werth beibehält; die letzteren dagegen findet man, wenn die beiden Variabeln x und y zu gleicher Zeit andere Werthe bekommen. Um die Differenzen,

welche aus der Aenderung der einen Variabeln hervorgehen, von denjenigen Differenzen zu unterscheiden, welche durch die Aenderung der andern Variabeln erzeugt werden, wollen wir unter das Differenzzeichen Δ das Zeichen der geänderten Größe schreiben.

Hiernach haben wir für die partiellen Differenzen von $u_{x,y}$:

$$u_{x+1,y} - u_{x,y} = \underset{x}{\Delta} u_{x,y};$$

$$\underset{x}{\Delta} u_{x+1,y} - \underset{x}{\Delta} u_{x,y} = \underset{x}{\overset{2}{\Delta}} u_{x,y};$$

$$u_{x,y+1} - u_{x,y} = \underset{y}{\Delta} u_{x,y};$$

$$\underset{y}{\Delta} u_{x,y+1} - \underset{y}{\Delta} u_{x,y} = \underset{y}{\overset{2}{\Delta}} u_{x,y}; \text{ u. s. w.}$$

Das Zeichen Δ ohne Beisatz soll immer die totale Differenz einer Funktion andeuten; es ist daher Δu die totale erste, und $\Delta^2 u$ die totale zweite Differenz von u.

§. 49. Die Formeln (A) und (B) der §§. 45 und 46 liefern uns, wenn y_0 mit $u_{0,0}$ vertauscht wird:

$$u_{x,0} = u_{0,0} + \frac{x}{1}\underset{x}{\Delta} u_{0,0} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\underset{x}{\Delta}^2 u_{0,0} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\underset{x}{\Delta}^3 u_{0,0} + \ldots;$$

$$\underset{x}{\overset{x}{\Delta}} u_{0,0} = u_{x,0} - \frac{x}{1}\cdot u_{x-1,0} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} u_{x-2,0} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} u_{x-3,0} + \ldots.$$

Um diesen Formeln einen höhern Grad von Allgemeinheit zu verschaffen, brauchen wir blos die zweite Null mit y zu verwechseln, wonach entspringt:

$$u_{x,y} = u_{0,y} + \frac{x}{1}\underset{x}{\Delta} u_{0,y} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\underset{x}{\Delta}^2 u_{0,y} + \text{ꝛc.}$$

Es ist aber auch;

$$u_{0,y} = u_{0,0} + \frac{y}{1}\cdot\underset{y}{\Delta} u_{0,0} + \frac{y(y-1)}{1\cdot 2}\underset{y}{\Delta}^2 u_{0,0} + \text{ꝛc.}$$

Indem man diesen Werth in die vorhergehende Formel substituirt und dabei berücksichtigt, daß

$$\underset{x}{\Delta}(\underset{y}{\Delta} u_{0,0}) = \underset{x,y}{\overset{1,1}{\Delta}} u_{0,0}; \quad \underset{x}{\overset{2}{\Delta}}(\underset{y}{\Delta} u_{0,0}) = \underset{x,y}{\overset{2,1}{\Delta}} u_{0,0} \ldots;$$

$$\underset{x}{\overset{m}{\Delta}}(\underset{y}{\Delta^n} u_{0,0}) = \underset{x,y}{\overset{m,n}{\Delta}} u_{0,0}, \text{ u. s. w.}$$

wo der letztere Ausdruck andeutet, daß man von einer Funktion die $m$te Differenz in Bezug auf die Veränderliche x und vom Resultate dann die $n$te Differenz in Bezug auf die Veränderliche y zu nehmen hat, erhält man so:

$$\left.\begin{aligned}
u_{x,y} = u_{0,0} &+ \frac{x}{1}\overset{1}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,0} + \frac{x(x-1)}{1\cdot2}\overset{2}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,0} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot2\cdot3}\overset{3}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,0} + \text{ꝛc.}\\
&+ \frac{y}{1}\overset{1}{\underset{y}{\Delta}}u_{0,0} + \frac{xy}{1\cdot1}\overset{1,1}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,0} + \frac{x(x-1)y}{1\cdot2\cdot1}\overset{2,1}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,0} + \text{ꝛc.}\\
&\qquad + \frac{y(y-1)}{1\cdot2}\overset{2}{\underset{y}{\Delta}}u_{0,0} + \frac{xy(y-1)}{1\cdot1\cdot2}\overset{1,2}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,0} + \text{ꝛc.}\\
&\qquad\qquad + \frac{y(y-1)(y-2)}{1\cdot2\cdot3}\overset{3}{\underset{y}{\Delta}}u_{0,0} + \text{ꝛc.}\\
&\qquad\qquad\qquad + \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right\}\text{(C).}$$

eine Formel, welche das allgemeine Glied vermittelst des ersten Gliedes $u_{0,0}$ und seiner partiellen Differenzen finden lehrt.

§. 50. Die Bildung dieser partiellen Differenzen geschieht auf folgende Weise. Man stellt vorerst successive nachstehende Reihen auf, nämlich:

$u_{0,0}$, $\underset{x}{\Delta}u_{0,0}$, $\overset{2}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,0}$, $\overset{3}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,0}$ . . . entsprechend dem $y=0$;

$u_{0,1}$, $\underset{x}{\Delta}u_{0,1}$, $\overset{2}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,1}$, $\overset{3}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,1}$ . . . entsprechend dem $y=1$;

$u_{0,2}$, $\underset{x}{\Delta}u_{0,2}$, $\overset{2}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,2}$, $\overset{3}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,2}$ . . . entsprechend dem $y=2$;

$u_{0,3}$, $\underset{x}{\Delta}u_{0,3}$, $\overset{3}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,3}$, $\overset{3}{\underset{x}{\Delta}}u_{0,3}$ . . . entsprechend dem $y=3$;

u. s. w.

Indem man jetzt die erste Reihe von der zweiten, diese wieder von der dritten, u. s. w. abzieht, erhält man die ersten Differenzen in Bezug auf y, nämlich:

$\underset{y}{\Delta}u_{0,0}$, $\overset{1,1}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,0}$, $\overset{2,1}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,0}$, . . . entsprechend dem $y=0$;

$\underset{y}{\Delta}u_{0,1}$, $\overset{1,1}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,1}$, $\overset{2,1}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,1}$, . . . entsprechend dem $y=1$;

$\underset{y}{\Delta}u_{0,2}$, $\overset{1,1}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,2}$, $\overset{2,1}{\underset{x,y}{\Delta}}u_{0,2}$, . . . entsprechend dem $y=2$: u. s. w.

Zieht man abermals die erste der letztern Reihen von der zweiten, diese von der dritten, u. s. w. ab; so bekommt man die zweiten Differenzen in Bezug auf y, nämlich:

$\overset{2}{\underset{y}{\triangle}} u_{0,0}$, $\overset{1,2}{\underset{x,y}{\triangle}} u_{0,0}$ . . . entsprechend dem $y=0$,

$\overset{2}{\underset{y}{\triangle}} u_{0,1}$, $\overset{1,2}{\underset{x,y}{\triangle}} u_{0,1}$ . . . entsprechend dem $y=1$; u. s. w.

Diese Verfahrungsart wird so lange fortgesetzt, als man es nöthig erachtet, worauf die Glieder in Bezug auf $u_{0,0}$ herausgehoben werden, welche in der Formel (C) vorkommen. Um das Gesagte auf ein Beispiel anzuwenden, seien die Zahlenwerthe einer Funktion u in folgender Tafel dergestalt zusammengestellt, daß sich der Werth $u_{x,y}$ in derjenigen Vertikalreihe, an deren Eingang x steht, und in derjenigen Horizontalreihe befindet, an deren Eingang y steht.

Werthe von x.

Werthe von y.		0	1	2	3	4	ꝛc.
	0	5	6	9	14	21	ꝛc.
	1	8	11	16	23	32	ꝛc.
	2	17	22	29	38	49	ꝛc.
	3	32	39	48	59	72	ꝛc.
	4	53	62	73	86	101	ꝛc.
	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	

Daraus entspringt:

als erste Gruppe;	als zweite Gruppe;	als dritte Gruppe;	als vierte Gruppe;
5, 1, 2, 0	3, 2, 0	6, 0	0
8, 3, 2, 0	9, 2, 0	6, 0	
17, 5, 2, 0	15, 2, 0		
32, 7, 2, 0			
u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.	u. s. w.

Hieraus ergibt sich:

$u_{0,0}=5;\ \underset{x}{\triangle}u_{0,0}=1;\ \underset{x}{\triangle^2}u_{0,0}=2;\ \underset{x}{\triangle^3}u_{0,0}=0;\ \underset{y}{\triangle}u_{0,0}=3;$

$\overset{1,1}{\underset{x,y}{\triangle}}u_{0,0}=2;\ \overset{2,1}{\underset{x,y}{\triangle}}u_{0,0}=0;\ \underset{y}{\triangle^2}u_{0,0}=6;\ \overset{1,2}{\underset{x,y}{\triangle}}u_{0,0}=0;\ \underset{y}{\triangle^3}u_{0,0}=0.$ Folglich:

$$u_{x,y}=5+x+3y+\frac{2x(x-1)}{2}+\frac{2xy}{1\cdot1}+\frac{6y(y-1)}{1\cdot2}=5+x^2+2xy+3y^2$$

für das allgemeine Glied der in der obigen Tafel enthaltenen Zahlenwerthe.

Für $u_{x,y}=x^p y^q$ findet man als erstes Glied von $\overset{m,n}{\underset{x,y}{\triangle}}x^p y^q$ den Ausdruck:

$p(p-1)(p-2)\ldots(p-m+1)q(q-1)\ldots(q-n+1)x^{p-m}y^{q-n}h^m k^n;$

diese Differenz wird constant, wenn $m=p$, $n=q$ ist.

Daraus folgt, daß man stets zu constanten Differenzen gelangt, sobald $u_{x,y}$ eine rationale und ganze Funktion in Bezug auf die Veränderlichen x und y ist, und daß in solchem Falle die Formel (C) aus einer begrenzten Anzahl von Gliedern besteht.

Anmerkung. Werden in den Binomialfactoren der Formel (C) die Multiplicationen verrichtet, so erhält man für das allgemeine Glied einen Ausdruck von der Form:

$$\begin{aligned}u_{x,y}=u_{0,0}&+ax+bx^2+cx^3+\text{etc.}\\&+a'y+b'xy+c'x^2y+\text{etc.}\\&+b''y^2+c''xy^2+\text{etc.}\\&+c'''y^3+\text{etc.}\end{aligned}$$

§. 51. Es läßt sich auch die totale Differenz der Funktion u von zwei Veränderlichen x, y mittelst der partiellen Differenzen ausdrücken. Durch die Aenderung von x verwandelt sich u in $u+\underset{x}{\triangle}u$, welche letztere Größe durch die Aenderung von y in:

$$u+\underset{x}{\triangle}u+\underset{y}{\triangle}(u+\underset{x}{\triangle}u)=u+\underset{x}{\triangle}u+\underset{y}{\triangle}u+\underset{y}{\triangle}\underset{x}{\triangle}u$$

übergeht, da offenbar die Aenderung des Ganzen der algebraischen Summe der Aenderungen seiner Bestandtheile gleich ist. Hiernach erhält man für die totale Differenz von u:

$$\triangle u=\underset{x}{\triangle}u+\underset{y}{\triangle}u+\underset{y}{\triangle}\underset{x}{\triangle}u.$$

Hätte man aber zuerst y und dann x sich ändern lassen, so würde man gefunden haben:

$$\underset{}{\triangle}u = \underset{y}{\triangle}u + \underset{x}{\triangle}u + \underset{x}{\triangle}\underset{y}{\triangle}u.$$

Aus der vergleichenden Zusammenstellung der beiden letztern Ausdrücke ergibt sich: $\underset{y}{\triangle}\underset{x}{\triangle}u = \underset{x}{\triangle}\underset{y}{\triangle}u.$

Nimmt man daher von einer Funktion zwei partielle Differenzen, die eine in Bezug auf y, die andere in Bezug auf x; so erhält man einerlei Resultat, in welcher Ordnung diese Operationen auch vorgenommen werden mögen.

Der hier gefundene Ausdruck für die totale Differenz einer Funktion von zwei Veränderlichen läßt sich auch symbolisch auf folgende Art darstellen:

$$\triangle u = \left[\left(1 + \underset{x}{\triangle}\right)\left(1 + \underset{y}{\triangle}\right) - 1\right]^u,$$

insofern man die Multiplicationen für Potenzen auf die Differenzzeichen überträgt.

Da die zweite Differenz $\overset{2}{\triangle}u$ aus der ersten entsteht, wenn man $\triangle u$ an die Stelle von u treten läßt; so hat man:

$$\triangle^2 u = \underset{x}{\triangle}\triangle u + \underset{y}{\triangle}\triangle u + \underset{x}{\triangle}\underset{y}{\triangle}\triangle u;$$

woraus, wenn man für $\triangle u$ seinen Werth setzt und entwickelt:

$$\underset{x}{\overset{2}{\triangle}}u + \underset{y}{\overset{2}{\triangle}}u + \underset{x}{\overset{2}{\triangle}}\underset{y}{\overset{2}{\triangle}}u + 2\underset{x}{\triangle}\underset{y}{\triangle}u + 2\underset{x}{\overset{2}{\triangle}}\underset{y}{\triangle}u + 2\underset{x}{\triangle}\underset{y}{\overset{2}{\triangle}}u;$$

welches Resultat auch symbolisch auf folgende Art dargestellt werden kann:

$$\triangle^2 u = \left[\left(1 + \underset{x}{\triangle}\right)\left(1 + \underset{y}{\triangle}\right) - 1\right]^{2u}.$$

Indem man die dritte Differenz $\triangle^3 u$ aus der zweiten $\triangle^2 u$, die vierte $\triangle^4 u$ aus der dritten $\triangle^3 u$, und allgemein die nte Differenz $\triangle^n u$ aus der $(n-1)$ten $\triangle^{n-1}u$ herleitet, findet man ganz allgemein:

$$\triangle^n u = \left[\left(1 + \underset{x}{\triangle}\right)\left(1 + \underset{y}{\triangle}\right) - 1\right]^{n u} \;\ldots\; (D).$$

Interpolation der Reihen.

§. 52. Welches auch die vorgelegte Reihe a, b, c, d . . . sein möge, so kann sie immer aus einer andern hergeleitet gedacht werden, von welcher man periodisch gewisse Glieder weggelassen, von der man z. B. die Glieder von 2 zu 2, oder von 3 zu 3, oder von 4 zu 4 . . . genommen hätte. Wir wollen nun versuchen, wenn die Reihe a, b, c . . . oder vielmehr der Ausdruck ihres allgemeinen Gliedes y_x gegeben ist, jene ursprüngliche Reihe, die durch:

$$a,\ a',\ a'' \ldots a^{(h-1)},\ b,\ b',\ b'' \ldots b^{(h-1)},\ c,\ c',\ c'' \ldots \quad (E)$$

dargestellt sein mag, aufzufinden. Man sieht, daß, der Voraussetzung gemäß, h—1 Glieder zwischen a und b, eben soviel Glieder zwischen b und c . . . als weggelassen betrachtet werden, welche Glieder demselben Gesetze wie die Glieder a, b, c . . . unterworfen sind. Es handelt sich also darum, zwischen die Glieder einer gegebenen Reihe eine bestimmte Anzahl Glieder dergestalt einzuschalten, daß die dadurch entstehende neue Reihe mit der ursprünglichen zu einerlei Gattung gehört, eine Operation, welche die **Interpolation der Reihen** heißt. Um zu interpoliren, muß man daher diese Zwischenglieder, oder vielmehr das allgemeine Glied der Reihe (E) finden. Zu diesem Behufe ist es hinreichend, in der Gleichung (A) dem Ausdrucke des allgemeinen Gliedes von a, b, c . . . die Bedingung $x = \frac{z}{h}$ einzuführen, wo z die Stelle irgend eines Gliedes der neuen Reihe (E) andeutet. Man erhält in der That auf solche Art die nämlichen Zahlen a, b, c . . . , als wenn man x=0, 1, 2 . . . in (A) gesetzt hätte, und überdies h—1 Zwischenglieder. Die gedachte Substitution führt uns auf nachstehende Interpolationsformel:

$$y_z = y_0 + \frac{z\triangle^1}{h} + \frac{z(z-h)\triangle^2}{2\cdot h^2} + \frac{z(z-h)(z-2h)\triangle^3}{2\cdot 3\cdot h^3} + \text{etc.} \ldots (F),$$

die nicht blos für ganze, sondern auch für gebrochene Werthe von z gilt und für x=z den Werth von y_x liefert. Aus der vorgelegten Reihe a, b, c, d . . . ergeben sich die verschiedenen Differenzreihen und die Anfangsglieder $\triangle^1$, $\triangle^2$ . . . derselben. — Folgendes Beispiel wird den Gebrauch dieser Formel erläutern. Zwischen je zwei Glieder der Reihe 1, 16, 49, 1000 . . . zwei neue Glieder

einzuschalten. Man hat hier $h=3$; $y_0=1$; $\triangle^1=15$; $\triangle^2=18$; $\triangle^3=\triangle^4 \ldots =0$. Mithin nach unserer Formel (F):

$$y_{0+\frac{1}{3}} = 1 + \tfrac{1}{3}\cdot 15 - \tfrac{1}{9}\cdot 18 = 4;$$

$$y_{0+\frac{2}{3}} = 1 + \tfrac{2}{3}\cdot 15 - \tfrac{1}{9}\cdot 18 = 9.$$

Für die beiden nächsten Zwischenglieder erhält man $y_{0+\frac{4}{3}}=25$ und $y_{0+\frac{5}{3}}=36$. Anstatt mit dem ersten Werthe y_0 diese beiden letzten Zwischenglieder zu berechnen, ließe sich auch der zweite Werth $y_{\prime}=16$ und die Differenzen $\triangle^{\prime}=33$ und $\triangle^2=18$ dazu gebrauchen. Die interpolirte Reihe wäre hiernach:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 . . .

§. 53. Um die Formel (F) anwenden zu können, muß man zu constanten Differenzen gelangen, damit sie begrenzt ist, oder wenigstens muß die Reihe der Differenzen $\triangle^1$, $\triangle^2$, $\triangle^3$ . . . abnehmend sein, damit der Ausdruck (F) convergent wird und es gestattet ist, denselben auf eine geringe Anzahl von Gliedern zu beschränken, wenigstens für einen gehörig zusammengedrängten Zwischenraum, was erheischt, z nicht über gewisse Grenzen hinaus gehen zu lassen. Nachstehende zwei Beispiele werden die Anwendung der Differenzen auf dergleichen Rechnungen zeigen.

1. Gesetzt, man habe gefunden, daß

dem Bogen	60°	die Sehne	1000,0
" "	65°	" "	1074,6
" "	70°	" "	1147,2
" "	75°	" "	1217,5

entspreche; hieraus entspringt als erste Differenzreihe $\triangle^1$: 74,6; 72,6; 70,3; als zweite Differenzreihe $\triangle^2$: —2,0; —2,3. Läßt man die wenig von einander verschiedenen zweiten Differenzen, wenigstens von dem Bogen 60° bis zum Bogen 75°, als gleich groß gelten; so kann man in diesem Zwischenraume die Gleichung (F) benutzen, welche, wegen $h=5$, in folgende übergeht:

$$y_z = 1000 + \tfrac{1}{5}\cdot 74,6\cdot z - \frac{2z}{50}(z-5) = 1000 + 15,12z - 0,04z^2,$$

worin nach und nach $z=1, 2, 3 \ldots$ zu setzen ist, um die Sehnen von den Bogen 61°, 62°, 63° . . . zu bekommen. Nimmt man für z gebrochene Werthe, so erhält man die Sehne irgend eines zwischen

60^0 und 75^0 liegenden Bogens. Für die Sehnen, welche außerhalb der hier gegebenen Grenzen liegen, dürfen die oben angegebenen Differenzen nicht weiter mehr in Anwendung kommen.

2. Die Mantissen der Logarithmen der Zahlen 3100; 3110; 3120; 3130; sind der Reihe nach:

4913617; 4927604; 4941546; 4955443,

indem wir jene Mantissen als ganze Zahlen ansehen, was hier gestattet ist. Hieraus ergibt sich als erste Differenzreihe:

Δ^1: 13987; 13942; 13897;

und als zweite Differenzreihe Δ^2: —45; —45.

Mit diesen Werthen erhält man für den Theil, welcher dem Logarithmen von 3100 hinzugefügt werden muß,

$$1400{,}95\,z - 0{,}225\,z^2.$$

Um die Logarithmen von 3101, 3102, 3103 . . . zu erhalten, macht man $z=1, 2, 3$ . . . Will man den Logarithmen von 3107,58 haben, so nimmt man $z=7{,}58$, woraus 10606 als die zu dem Logarithmen von 3100 hinzuzufügende Zahl entspringt: es ist hiernach

$$\log 310758 = 5{,}4924223.$$

§. 54. Man kann aus den angeführten Beispielen schon entnehmen, wie die Interpolationsmethode auf viele andere Fälle anwendbar sein muß; von großem Nutzen ist dieselbe bei Verfertigung von Tafeln aller Art, indem man durch sie vieler mühseligen Rechnungen enthoben wird. Man berechnet nämlich auf direktem Wege die fraglichen Werthe in gewissen Entfernungen und ergänzt dann den Zwischenraum nach der Interpolationsmethode.

Sehr häufig entsprechen den Gliedern der vorgelegten Reihe a, b, c . . . oder der Folge von Zahlen, zwischen denen interpolirt werden soll, die Stellenzeiger 1, 2, 3 . . . ; man hat alsdann $h=1$ und für irgend ein zwischen y_0 und y_1 befindliches, dem Stellenzeiger y_z zugehöriges Glied den Ausdruck:

$$y_z = y_0 + z\Delta^1 + z\cdot\frac{z-1}{2}\,\Delta^2 + z\cdot\frac{z-1}{2}\cdot\frac{z-2}{3}\,\Delta^3 + \text{ꝛc.} \ldots \quad (G).$$

1. Für den Fall, daß Δ^2 Null oder sehr klein ist, reducirt sich die letzte Formel auf $y_z = y_0 + z\Delta^1$, woraus folgt, daß die Differenz $z\Delta^1$ proportional mit z wächst.

2. Wenn Δ^2 constant oder Δ^3 sehr klein ist, was am häufigsten vorkommt, hat man:

$$y_x = y_0 + z[\Delta^1 + \tfrac{1}{2}(z-1)\Delta^2].$$

Hieraus entspringt folgende Regel:

Man bilde den Ausdruck $\frac{1}{2}(z-1)\Delta^2$ und verbessere Δ^1 um diese Größe, betrachte dann das Resultat als erste Differenz und nehme die zweite Differenz als Null an; hierdurch wird dieser Fall auf den ersten zurückgeführt. Als Beispiel diene folgendes, wieder aus den Logarithmen entlehntes Beispiel, nämlich:

$$\log 310 = 2{,}4913617 = y_0$$
$$\log 311 = 2{,}4927604$$
$$\log 312 = 2{,}4941546$$
$$\log 313 = 2{,}4955443;$$

hieraus	$=\Delta^1$,	$=\Delta^2$
	13987	-45
	13942	-45
	13897	

mithin die zweite Differenz Δ^2 gleich groß.

Um nun den Logarithmen von 310,758 zu bekommen, mache man $z = 0{,}758$, woraus:

$$\tfrac{1}{2}(z-1)\,\Delta^2 = 0{,}121 \cdot 45 = 5{,}445.$$

Indem man diese Zahl zu Δ^1 addirt, hat man die Zahl 13992,445, deren Produkt mit $z = 10606{,}27$ ist: hiernach wird

$$\log 310{,}758 = 2{,}4924223.$$

3. Wenn Δ^3 constant ist oder Δ^4 als Null gelten kann, hat die Formel (G) nur vier Glieder. Man muß dann die Differenz Δ^2 um die Größe $\frac{1}{3}(z-2)\Delta^3$ verbessern und das gefundene Resultat als constante, zweite Differenz ansehen, u. s. w. Eine Anwendung des hier angegebenen Verfahrens finden wir in Callets Logarithmentafeln, wo die Logarithmen bis auf 20 Decimalstellen berechnet sind.

4. Umgekehrt, wenn die Glieder y_z und y_0 gegeben sind und man den Stellenzeiger z des Gliedes y_z suchen will; so hat man, unter der Voraussetzung, daß die zweite Differenz constant ist:

$$z = \frac{y_z - y_0}{\Delta^1 + \frac{1}{2}(z-1)\Delta^2}$$

Man verrichtet vorerst die Rechnung, indem das zweite Glied des Nenners vernachläßigt wird, wodurch man einen genäherten Werth von z erhält, den man hierauf statt z in die letzte Formel substituirt, ohne darin etwas wegzulassen. Aus dem Resultat der Rechnung in dem vorhergehenden Beispiele bekommt man den Zähler $y_z - y_0 = 10606$, welcher durch $\Delta^1 = 13987$ dividirt, als erste Annäherung $z = 0,758$ gibt: dieser Werth statt z in unsere Formel gesetzt, liefert:

$$z = \frac{10606}{13992} = 0,758.$$

Das umgekehrte Problem wird auf ähnliche Art behandelt, wenn Δ^3 constant ist.

§. 55. Eine bequeme Methode, die Rechnung durchzuführen, wenn Δ^2 constant ist, und es sich darum handelt, n successive zwischen y_0 und y_1 liegende Glieder aufzufinden, ist folgende. Man vertauscht z mit $z+1$ in der Formel (F) und zieht dann das erste Resultat vom zweiten ab; dadurch erhält man einen allgemeinen Ausdruck für die erste Differenz der neuen interpolirten Reihe; indem mit dieser Differenz auf ähnliche Weise verfahren wird, erhält man die zweite Differenz. Es entstehen hiernach für die erste Differenz δ^1 und für die zweite Differenz δ^2 die Ausdrücke:

$$\delta^1 = \frac{\Delta^1}{h} + \frac{2z-h+1}{2h^2}\Delta^2; \quad \delta^2 = \frac{\Delta^2}{h^2}.$$

Will man nun n Glieder zwischen y_0 und y_1 einschalten, so muß man $h = n+1$ nehmen; indem man dann $z=0$ setzt, bekommt man das Anfangsglied der Differenzen:

$$\delta^2 = \frac{\Delta^2}{(n+1)^2}, \quad \delta^1 = \frac{\Delta^1}{n+1} - \tfrac{1}{2} n \, \delta^2$$

Man berechnet demnach zuerst δ^2, hierauf δ^1; dieses Anfangsglied δ^1 dient dazu, die Folge der ersten Differenzen der interpolirten Reihe, in welcher die zweite Differenz δ^2 constant ist, aufzustellen, woraus sich dann diese Reihe durch bloße Additionen ergibt.

Will man nach dieser Methode eines von den oben vorgelegten Beispielen behandeln, nämlich die Logarithmen von 3101; 3102; 3103 . . . berechnen; so muß man 9 Glieder zwischen die gegebenen einschalten: daraus folgt $n=9$; $\delta^2=-0,45$; $\delta^1=1400,725$.

Indem man zuförderst die arithmetische Reihe bildet, welche δ^1 zum Anfangsglied und $-0,45$ zur constanten Differenz hat, entsteht für die ersten Differenzen die Reihe:

1400,725; 1400,275; 1399,825; 1399,375; 1398,925 . . . . .

Successive Additionen, wobei von log 3100 ausgegangen wird, liefern dann die auf einander folgenden gesuchten Logarithmen.

§. 56. In der Anwendung auf astronomische oder physikalische Gegenstände überhaupt bedient man sich oft mit dem größten Vortheile der Interpolationsmethode, wie man aus nachstehenden Beispielen ersehen kann:

1. Wir wollen annehmen, daß man ein physikalisches Phänomen von 12 zu 12 Stunden beobachtet und dabei folgende Resultate erhalten habe:

Im Anfang der Zeit	$y_0=$ 78;	daraus	$\Delta^1=222$	$\Delta^2=144$
nach 12 Stunden	. . 300;		366	144
nach 24 Stunden	. . 666;		510;	
nach 36 Stunden	. . 1176;			

Um hiernach den Zustand der Erscheinung nach Verlauf von 4, 8, . . . Stunden zu bestimmen, interpoliren wir 2 Glieder in der durch Beobachtung gefundenen Reihe, was uns $n=2$, $\delta^2=16$, $\delta^1=58$ gibt. Indem wir nun die arithmetische Reihe, deren Anfangsglied 58 und constante Differenz 16 ist, bilden, bekommen wir die ersten Differenzen unserer Reihe und hierauf diese selbst, nämlich:

Reihe der ersten Differenzen δ^1...		58;	74;	90;	106;	122;	138...
Ursprüngliche Reihe	78;	136;	210;	300;	406;	528,	666...
für die entsprechenden Zeiten .	0^{St};	4^{St};	8^{St};	12^{St};	16^{St};	20^{St};	24^{St}...

2. Ist Δ^3 nicht Null, jedoch sehr klein; so begeht man, unter der Voraussetzung, daß Δ^2 constant wird, einen kleinen Fehler, den man zum Theil dadurch verbessert, daß man für die zweite Differenz eine Mittelzahl zwischen den gefundenen zweiten Differenzen nimmt.

Die Länge des Mondes für den 17. Februar 1840 um $2^{\mathrm{u}}\ 2^{\mathfrak{M}}\ 93^{\mathfrak{S}}$ Nachmittags mittelst der Mondestafeln zu bestimmen, nach denen wir haben:

den 16. Februar	12 Uhr Nachts	die Mondeslänge	$y=140^0\ 7'\ 9'',6$;
den 17. „	12 Uhr Mittags	„ „	$146^0 53' 21'',8$;
den 17. „	12 Uhr Nachts	„ „	$153^0 35' 21'',2$;
den 18. „	12 Uhr Mittags	„ „	$160^0 12' 56'',7$.

Daraus entsteht als erste Differenzreihe Δ^1:

$$6^0 46' 12'',2;\ 6^0 41' 59,4'';\ 6^0 37' 35'',5;$$

und als zweite Differenzreihe Δ^2:

$$-4' 12'',8;\ -4' 23'',9,$$

wofür die Mittelzahl $\Delta^2 = -4' 18'',35$ genommen wird.

Die Formel (F) gibt, wenn wir $h=12$ und $\Delta^3=0$ setzen:

$$y_z = y_0 + \frac{z}{12}\Delta' + \frac{z(z-12)}{2\cdot 12^2}\Delta^2, \text{ oder}$$

$$y_z = y_0 + \frac{z}{12}(\Delta^1 - \tfrac{1}{2}\Delta^2) + \tfrac{1}{2}\Delta^2\left(\frac{z}{12}\right)^2.$$

Mit Hülfe dieser Formel, in welcher $z=2^{\mathrm{u}}\ 2^{\mathfrak{M}}\ 36^{\mathfrak{S}}$;

$$y^0 = 146^0 53' 21'',8;\ \Delta^1 = 6^0 41' 59'',4;\ \Delta^2 = -4' 18'',35$$

ist, finden wir die gesuchte Länge $y_z = 148^0 2' 7'',52$.

§. 57. Das allgemeine Problem, eine Funktion von x zu finden, welche für die Werthe von $x=x_0, x_1, x_2, x_3 \ldots$ die zugehörigen Werthe von $y=y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots$ liefert, ist seiner Natur nach ein unbestimmtes: denn man kann durch sehr verschiedenartige Funktionen den aufgestellten Bedingungen Genüge thun, insofern man nur jene Funktionen so wählt, daß sie die erforderliche Zahl von willkührlichen Constanten enthalten, um gedachte Bedingungen erfüllen zu können.

Diese Aufgabe stimmt ganz mit derjenigen überein, wo es sich darum handelt, die Gleichung einer Curve zu finden, die durch eine gewisse Anzahl gegebener Punkte geht, welche Punkte die krumme Linie nicht genau zu bestimmen vermögen, wenn deren Gattung nicht bekannt ist, indem sich zwei von einander sehr verschiedene Curven in einer beliebigen Anzahl von Punkten treffen können: in solchem Falle befinden sich die Curven BCD und EFG (Fig. 9) welche nur

die gegebenen Punkte M, M′, M″ . . . gemein haben, in dem Zwischenraum aber von einem dieser Punkte zu dem darauf folgenden bedeutend von einander abweichen. Weiß man nun, daß den Werthen x_0, x_1, x_2 . . . für x, wobei diese Größen gleich oder ungleich weit von einander abstehen können, die Werthe y_0, y_1, y_2, . . . einer Funktion y von x entsprechen; so bedient man sich der Formel:

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+\ldots,$$

welche durch die Substitution der besondern Werthe x_0, x_1, x_2, x_3... folgende Relationen liefert:

$$y_0=A+Bx_0+Cx_0{}^2+Dx_0{}^3+\ldots,$$
$$y_1=A+Bx_1+Cx_1{}^2+Dx_1{}^3+\ldots,$$
$$y_2=A+Bx_2+Cx_2{}^2+Dx_2{}^3+\ldots,$$
$$y_3=A+Bx_3+Cx_3{}^2+Dx_3{}^3+\ldots,\ \text{u. s. w.}$$

deren Anzahl derjenigen der unbestimmten Coefficienten A, B, C, D... gleich sein muß. Die Ausdrücke für diese Coefficienten lassen sich nun folgendermaßen herleiten. Man ziehe nach und nach die erste Gleichung von der zweiten, diese von der dritten, u. s. w. ab; man erhält dadurch:

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=B+C(x_1+x_0)+D(x_1{}^2+x_1x_0+x_0{}^2)+\text{ꝛc.},$$
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=B+C(x_2+x_1)+D(x_2{}^2+x_2x_1+x_1{}^2)+\text{ꝛc.},$$
$$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=B+C(x_3+x_2)+D(x_3{}^2+x_3x_2+x_2{}^2)+\text{ꝛc.};\ \text{u. s. f.}$$

Setzt man der Kürze halber:

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=U,\ \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=U_1,\ \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=U_2\ \text{u. s. w.},$$

so hat man die Gleichungen:

$$U=B+C(x_1+x_0)+D(x_1{}^2+x_1x_0+x_0{}^2)+\text{ꝛc.},$$
$$U_1=B+C(x_2+x_1)+D(x_2{}^2+x_2x_1+x_1{}^2)+\text{ꝛc.},$$
$$U^2=B+C(x_3+x_2)+D(x_3{}^2+x_3x_2+{}_2x^2)+\text{ꝛc.},\ \text{u. s. w.}$$

Zieht man wieder die erste dieser Gleichungen von der zweiten, diese von der dritten, u. s. w. ab, und setzt:

$$\frac{U_1-U}{x_2-x_0}=U';\ \frac{U_2-U_1}{x_3-x_1}=U_1{}';$$

so findet man:

$$U' = C + D(x_2 + x_1 + x_0) + \text{rc.},$$
$$U_1' = C + D(x_3 + x_2 + x_1) + \text{rc.}, \text{ u. s. w.}$$

Hieraus folgert man:

$$U_1' - U' = D(x_3 - x_0) + \text{rc.}, \text{ oder}$$
$$U'' = D + \text{rc.}, \text{ wenn } \frac{U_1' - U'}{x_3 - x_0} = U'' \text{ gesetzt wird.}$$

Nimmt man, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, blos vier Glieder in dem Werthe von y, d. h. setzt man:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3; \text{ so kommt:}$$
$$D = U'',$$
$$C = U' - U''(x_2 + x_1 + x_0),$$
$$B = U - U'(x_1 + x_0) + U''(x_2x_1 + x_2x_0 + x_1x_0),$$
$$A = y_0 - Ux + U'x_1x_0 - U''x_2x_1x_0.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck von y, so bekommt man die Gleichung:

$$y = y_0 + U(x - x_0) + U'[x^2 - (x_1 + x_0)x + (x_1x_0)]$$
$$+ U''[x^3 - (x_2 + x_1 + x_0)x^2 + (x_2x_1 + x_2x_0 + x_1x_0)x - x_2x_1x_0],$$

welche, da sich die Coefficienten von U, U' und U'' in einfache Faktoren zerlegen lassen, in folgende übergeht:

$$y = y_0 + U(x - x_0) + U'(x - x_0)(x - x_1) + U''(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

Dehnt man dieses Verfahren durch Analogie weiter aus, so wird man bei einer beliebigen Anzahl von Werthen x_0, x_1, x_2 . . . von x nachstehende allgemeine Gleichung erhalten:

$$y = y_0 + U(x - x_0) + U'(x - x_0)(x - x_1) + U''(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$+ U'''(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + \text{rc.} \ldots \text{(H)},$$

welche die Newton'sche Interpolationsformel heißt und wo die Coefficienten U, U', U'', . . . aus folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=U,\quad \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=U_1,\quad \frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=U_2,\quad \frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=U_3,\ \text{rc.}$$

$$\frac{U_1-U}{x_2-x_0}=U',\quad \frac{U_2-U_1}{x_3-x_1}=U_1',\quad \frac{U_3-U_2}{x_4-x_2}=U_2',\ \text{rc.};$$

$$\frac{U_1'-U'}{x_3-x_0}=U'',\quad \frac{U_2'-U_1'}{x_4-x_1}=U_1'',\ \text{rc.};$$

$$\frac{U_1''-U''}{x_4-x_0}=U'''\ \text{rc.}$$

Anmerkung. Sind die Werthe x_0, x_1, x_2 .... äquidifferent, und macht man $x_1-x_0=x_2-x_1 \ldots =h$; so hat man:

$$U=\frac{\Delta y_0}{h},\quad U_1=\frac{\Delta y_1}{h},\quad U_2=\frac{\Delta y_2}{h},\ \text{rc.};$$

$$U'=\frac{\Delta^2 y_0}{1\cdot 2h^2},\quad U_1'=\frac{\Delta^2 y_1}{1\cdot 2h^2},\quad U_2'=\frac{\Delta^2 y_2}{1\cdot 2h^2},\ \text{rc.};$$

$$U''=\frac{\Delta^3 y_0}{1\cdot 2\cdot 3h^3},\quad U_1''=\frac{\Delta^3 y_1}{1\cdot 2\cdot 3h^3},\ \text{rc.};$$

$$U'''=\frac{\Delta^4 y_0}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4h^4}\ \text{rc.}$$

Macht man endlich noch $x=x_0+z$, wodurch:

$$x-x_0=z,\quad x-x_1=z-h,\quad x-x_2=z-2h,\quad x-x_3=z-3h\ \text{rc.}$$

wird; so erhält man, wenn diese und die vorigen Werthe in die Gleichung (H) substituirt werden, den Ausdruck:

$$y=y_0+\frac{z}{h}\Delta y_0+\frac{z(z-h)}{2h^2}\Delta^2 y_0+\frac{z(z-h)(z-2h)}{1\cdot 2\cdot 3h^3}\Delta^3 y_0+\text{rc.}$$

welcher mit der Formel (F) zusammenfällt.

§. 58. Die in der Gleichung (H) vorkommenden Coefficienten U, U', U'' ... lassen sich unter einer bemerkenswerthen Form darstellen, welche hier angegeben werden soll. Man hat:

$$U=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\frac{y_1}{x_1-x_0}+\frac{y_0}{x_0-x_1};$$

$$U'=\frac{U_1-U}{x_2-x_0}=\frac{1}{x_2-x_0}\left(\frac{y_2}{x_2-x_1}+\frac{y_1}{x_1-x_2}-\frac{y_1}{x_1-x_0}-\frac{y_0}{x_0-x_1}\right),$$

oder, wenn man die beiden mittlern Glieder unter einerlei Nenner bringt:

$$U' = \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} + \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}.$$

Auf ähnliche Art würde man finden:

$$U'' = \frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} + \frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$
$$+ \frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + \frac{y^0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)},$$

was hinreicht, das Gesetz, nach welchem diese Coefficienten gebildet werden, zur Evidenz zu bringen.

Werden in der Formel (H) für x nach und nach die Werthe x_0, x_1, x_2, x_3, . . . eingeführt, so entspringen folgende Gleichungen:

$y_0 = y_0$;

$y_1 = y_0 + U(x_1 - x_0)$;

$y_2 = y_0 + U(x_2 - x_0) + U'(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$;

$y_3 = y_0 + U(x_3 - x_0) + U'(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) + U''(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$; ꝛc.,

mittelst deren jeder von den Coefficienten U, U′, U″ . . . durch diejenigen, welche ihm voranstehen, bestimmt wird.

§. 59. Lagrange gibt uns die Interpolationsformel unter einer andern Gestalt. Da nämlich eine solche Formel für die Werthe $x = x_0$, x_1, x_2, . . . bezüglich für y die Werthe y_0, y_1, y_2 . . . . liefern soll; so kann man mit Lagrange setzen:

$$y = X_0 y_0 + X_1 y_1 + X_2 y_2 + \text{ꝛc.},$$

wofern nur X_0, X_1, X_2 . . . solche Funktionen von x sind:

daß für $x = x_0$: $X_0 = 1$, $X_1 = X_2 \ldots = 0$;

für $x = x_1$: $X_1 = 1$, $X_0 = X_2 \ldots = 0$;

für $x = x_2$: $X_2 = 1$, $X_0 = X_1 = X_3 \ldots = 0$ u. s. w.,

wird, welche Bedingungen erfüllt werden, wenn man setzt:

$$X_0 = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots};$$

$$X_1 = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots};$$

$$X_2 = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots}; \text{ u. s. w.}$$

Hieraus entspringt folgende, für den Gebrauch bequeme Interpolationsformel, deren schon im §. 158 der „analytischen Geometrie der Ebene“ Erwähnung geschehen ist, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} y=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)\ldots}y_0\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)\ldots}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots}y_1\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\ldots}y_2\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\ldots}y_3\\ &+\text{ꝛc.}\end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{I})$$

Anmerkung. Es ist nicht schwer, die Formel (I) auf die Formel (H) zurückzuführen. Wir nehmen zu diesem Behuf, um wieder etwas Bestimmtes vor Augen zu haben, die aus vier Paaren von Werthen construirte Formel, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} y=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2\\ &+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3\end{aligned}\right\}(\mathrm{I}).$$

Benutzt man nur zwei Paare von Werthen x_0, y_0 und x_1, y_1; so hat man, wenn jetzt y' statt der gesuchten Funktion y gesetzt wird:

$$y'=\frac{(x-x_1)}{x_0-x_1}y_0+\frac{(x-x_0)}{x_1-x_0}y_1\ldots(1)$$

Benutzt man noch das dritte Paar von Werthen x_2, y_2; so erhält man, wenn jetzt y'' statt der gesuchten Funktion y geschrieben wird:

$$y''=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2\ldots(2).$$

Aus (1) entspringt sofort:

$$y'=y_0+(x-x_0)\cdot\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=y_0+(x-x_0)U\ldots(\alpha),$$

weil nach unserer frühern Bezeichnungsweise $\frac{y_1-y_0}{x_1-x^0}=U$ ist.

Aus (2) ergibt sich, wenn man (1) subtrahirt:

$$y''=y'+(x-x_0)(x-x_1)\left(\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\right.$$
$$\left.+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\right),$$

oder, mit Berücksichtigung der im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Relationen:

$$y''=y'+(x-x_0)(x-x_1)\,U' \;\ldots\; (\beta).$$

Aus (3) entsteht, wenn man (2) subtrahirt:

$$y=y''+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$
$$\left(\frac{y_0}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+\frac{y_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right.$$
$$\left.\frac{y_2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{y_3}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right),$$

oder in Erwägung der eben gedachten Relationen:

$$y=y''+(x-x_0)(x-x_1)(x-2)\;U''\;\ldots\;(\gamma).$$

Addirt man die drei Gleichungen (α), (β) und (γ) und läßt die auf beiden Seiten gemeinschaftlichen Glieder weg, so findet man:

$$y=y_0+(x-x_0)U+(x-x_0)(x-x_1)U'+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)U'',$$

welches nichts anderes als die Newton'sche Interpolationsformel ist.

§. 60. Es lassen sich nach dem Muster der Lagrange'schen Interpolationsformel noch neue Interpolationsformeln bilden. Denn die Bedingungen, welchen die Größen X_0, X_1, X_2 ... unterworfen sind, können auf unzählige Arten erreicht werden.

Man kann z. B. setzen:

$$X_0=\frac{(x-x_1)^m(x-x_2)^n\ldots}{(x_0-x_1)^m(x_0-x_2)^n\ldots},$$

wo die zweite Seite zur Einheit wird, wenn $x=x_0$ ist. Nach dieser Vorschrift bildet man leicht die Werthe von X_1 X_2..., wobei die Exponenten m, n... beliebige reelle Zahlen vorstellen. Man kann auch andere Funktionen wählen und z. B. setzen:

$$X_0=\frac{\sin m(x-x_1)\sin n(x-x_2)\ldots}{\sin m(x_0-x_1)\sin n(x_0-x_2)\ldots},$$

deren zweite Seite wieder zur Einheit wird, wenn $x = x_0$ ist, und worin die Coefficienten m, n . . . abermals ganz beliebige Zahlen sein können. Man sieht hieraus wiederum, daß das Problem der Interpolation ein unbestimmtes ist, wenn nicht besondere Umstände vorliegen, welche die Wahl dieser Form näher fixiren.

Analogie der Differenzen mit den Potenzen.

§. 61. Setzt man $\frac{dy}{dx}h$ statt x in der Entwickelung:

$$\varepsilon^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{ꝛc.},$$

so bekommt man: $\varepsilon^{\frac{dy}{dx}h} - 1 = \frac{dy}{dx}h + \tfrac{1}{2}\frac{dy^2}{dx^2}h^2 + \text{ꝛc.}$

Ueberträgt man nun die Exponenten von dy auf das Kennzeichen d, so nimmt der zweite Theil dieser Gleichung folgende Gestalt an:

$$\frac{dy}{dx}h + \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{ꝛc.}$$

Nach dem Taylor'schen Lehrsatze haben wir aber:

$$y_1 - y = \frac{dy}{dx}h + \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{ꝛc.},$$

oder, weil $y_1 - y$ nichts Anderes als die Differenz Δy ist,

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}h + \tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \text{ꝛc.}$$

Man hat hiernach: $\Delta y = \left(\varepsilon^{\frac{dy}{dx}h} - 1\right)$,

insofern man in der Entwickelung des zweiten Theils die Exponenten der Potenzen von dy auf das Kennzeichen d überträgt. Der letztere Ausdruck läßt sich auch noch einfacher, wie folgt, schreiben:

$$\Delta y = \left(\varepsilon^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)y,$$

wo in der Entwickelung gar nichts mehr zu ändern, jedoch nicht zu vergessen ist, daß der Buchstabe d ein Kennzeichen und keine Größe bedeutet.

§. 62. Lagrange schloß der Analogie nach, daß im Allgemeinen:

$$\Delta^n y = \left(\varepsilon^{\frac{dy}{dx}h} - 1\right)^n \text{ oder}$$

$$\Delta^n y = \left(\varepsilon^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)^n y \text{ sei,}$$

was La Place auf folgende Art bewiesen hat.

Setzt man Δy statt y in der Relation

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{rc.},$$

so erhält man den Ausdruck:

$$\Delta^2 y = \frac{d\Delta y}{dx}h + \frac{d^2\Delta y}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot 2} + \frac{d^3\Delta y}{dx^3}\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{rc.},$$

oder, wenn man für Δy dessen Entwickelung einführt:

$$\Delta^2 y = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{2\cdot 3} + \text{rc.}$$

$$+ \frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^3}{2} + \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{2\cdot 3} + \text{rc.}$$

$$+ \frac{d^4y}{dx^4}\frac{h^4}{2\cdot 3} + \text{rc.}$$

Auf diesem Wege weiter fortschreitend, kommt La Place zu dem allgemeinen Ausdrucke:

$$\Delta^n y = \frac{d^n y}{dx^n}h^n + A'\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}h^{n+1} + A''\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}}h^{n+2} + \text{rc.},$$

wo A', A'' ... Coefficienten bedeuten, welche nur von n abhängen, mithin unverändert bleiben, wie die Funktion y auch beschaffen sein mag.

Für die Funktion $y = \varepsilon^x$ hat man aber:

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varepsilon^x \text{ und } \Delta^m y = \varepsilon^x(\varepsilon^h - 1)^m \text{ (§. 41.)}$$

Durch Substitution dieser Werthe in die obige Gleichung entsteht:

$$(\varepsilon^h - 1)^n = h^n + A'h^{n+1} + A''h^{n+2} + \ldots,$$

woraus, wegen der Unbestimmtheit von h, folgt, daß die Coefficienten A', A''... die nämlichen wie die der Entwickelung von $(\varepsilon^h - 1)^n$ sind. Ueberdies sieht man, daß man von dem zweiten Theile der letzten Gleichung auf die für $\Delta^n y$ oben aufgestellte Entwickelung

gelangt, wenn man die Potenzen von h mit den Größen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} h^n, \quad \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}} h^{n+1} \ldots$$

vertauscht, oder mit andern Worten, wenn man $\left(\varepsilon^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^n y$ statt $(\varepsilon^h - 1)^n$ schreibt.

§. 63. Eine ähnliche Beziehung zwischen den Potenzen und Differenzen findet auch bei den Funktionen von einer beliebigen Anzahl von Veränderlichen statt, was wir für die Funktion u von zwei Variabeln x und y nachweisen wollen. Gehen diese beiden Veränderlichen bezüglich in $x+h$ und $y+k$ über, so erhält man für die totale Differenz Δu der Funktion folgende Entwickelung:

$$\Delta u = \left(\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k\right)\frac{1}{1}$$
$$+ \left(\frac{d^2u}{dx^2} h^2 + 2\frac{d^2u}{dxdy} kh + \frac{d^2y}{dy^2} k^2\right)\frac{1}{1 \cdot 2}$$
$$+ \left(\frac{d^3u}{dx^3} h^3 + 3\frac{d^3u}{dx^2dy} h^2k + 3\frac{d^3u}{dxdy^2} hk^2 + \frac{d^3u}{dy^3} k^3\right)\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{rc.}$$

welche sich aus dem Ausdrucke

$$\varepsilon^{\frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k} - 1$$

dadurch ableiten läßt, daß man die Exponenten von du auf das Zeichen d überträgt, d. h. das Produkt

$$\frac{du^p}{dx^p}\,\frac{du^q}{dy^q} \text{ in } \frac{d^{p+q}u}{dx^p\,dy^q}$$

umwandelt, oder noch einfacher, daß man die Gleichung:

$$\Delta u = \left(\varepsilon^{h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}} - 1\right) u$$

ansetzt, wobei nach ausgeführter Entwickelung der Buchstabe u dem Zeichen d beigeschrieben wird.

Der Analogie gemäß hat man:

$$\Delta^n u = \left(\varepsilon^{h \frac{d}{dx} + k \frac{d}{dy}} - 1\right)^n u.$$

In der That findet man mit Hülfe der successiven Entwickelungen, welche die wiederholten Substitutionen von $x+h$ und $y+k$ in denen von Δu, $\Delta^2 u$ u. s. w. hervorbringen, den allgemeinen Ausdruck:

$$\Delta^n u = \left(\frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^n u}{dx^{n-1}dy} h^{n-1}k + A'' \frac{d^n u}{dx^{n-2}dy^2} h^{n-2}k^2 + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \left(B \frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + B' \frac{d^{n+1}u}{dx^n\, dy} h^n k + B'' \frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2} h^{n-1}k^2 + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Für die Funktion $u = \varepsilon^{x+y}$ hat man nun:

$$\frac{d^{p+q}u}{dx^p\, dy^q} = \varepsilon^{x+y} \text{ und } \Delta^n u = \varepsilon^{x+y}(\varepsilon^{h+k} - 1)^n.$$

Durch Substitution dieser Werthe in die vorhergehende Gleichung entsteht:

$$(\varepsilon^{h+k} - 1)^n = h^n + A'h^{n-1}k + A'h^{n-2}k^2 + \text{ꝛc.}$$
$$+ B h^{n+1} + B'h^n k + B''h^{n-1}k^2 + \text{ꝛc.}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

woraus hervorgeht, daß die numerischen Coefficienten A', A'' . . . B, B' . . . des zweiten Theils mit denen der Entwickelung des ersten Theils einerlei sein müssen.

§. 64. In Bezug auf die partiellen Differenzen der Funktionen von zwei Veränderlichen, hat man zuförderst die Gleichungen:

$$\underset{x}{\Delta^m} u = \left(\varepsilon^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^m u, \quad \underset{y}{\Delta^n} u = \left(\varepsilon^{k\frac{d}{dy}} - 1\right)^n u.$$

Durch die Combination dieser beiden Formeln erhält man für die Entwickelung des Ausdruckes

$$\underset{y}{\Delta^n}(\underset{x}{\Delta^m} u) = \underset{x,y}{\Delta^{m+n}} u$$

ein Resultat von der Form:

$$\underset{x,y}{\Delta^{m+n}} u = \frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n} h^m k^n + A \frac{d^{m+n+1}u}{dx^{m+1}dy^n} h^{m+1}k^n + \text{ꝛc.}$$

Indem man den zweiten Theil der Gleichung

$$\underset{x,y}{\Delta^{m+n}} u = \left(\varepsilon^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^m \left(\varepsilon^{k\frac{d}{dy}} - 1\right)^n u$$

entwickelt, findet man einen Ausdruck von der nämlichen Form.

Die Identität der Coefficienten in beiden Entwickelungen wird wieder dadurch nachgewiesen, daß man $u = \varepsilon^{x+y}$ nimmt; mithin:

$$\underset{x,y}{\Delta^{m+n}} u = \varepsilon^{x+y}(\varepsilon^h - 1)^m(\varepsilon^k - 1)^n u.$$

§. 65. Läßt man in der Funktion y von x die unabhängige Veränderliche x um nh wachsen, so hat man nach dem Taylor'schen Satze:

$$y_n = y + \frac{dy}{dx} nh + \frac{d^2y}{dx^2} \frac{n^2h^2}{1 \cdot 2} + \text{ꝛc.};$$

und nach der Formel A (§. 45.):

$$y_n = y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \text{ꝛc.}$$

Werden die Produkte der äquidifferenten Factoren in der letzten Formel ausgeführt, so ergeben sich aus der vergleichenden Zusammenstellung der Glieder, welche in den beiden Entwickelungen von u_n mit den nämlichen Potenzen von n behaftet sind, folgende Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} h = \Delta y - \tfrac{1}{2} \Delta^2 y + \tfrac{1}{3} \Delta^3 y - \tfrac{1}{4} \Delta^4 y + \text{ꝛc.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} h^2 = \Delta^2 y - \Delta^3 y + \tfrac{11}{12} \Delta^4 y - \text{ꝛc.},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} h^3 = \Delta^3 y - \tfrac{3}{2} \Delta^4 y + \text{ꝛc.},$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} y^4 = \Delta^4 y - \text{ꝛc.}; \text{ u, s. w.}$$

wovon die erste folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{dy}{dx} h = [l(1 + \Delta)] y..$$

§. 66. Im Allgemeinen ist $\frac{d^n y}{dx^n} h^n = [l(1+\Delta)]^n y.$

In der That kann man nach dem oben Gesagten aufstellen:

$$\frac{d^n y}{dx^n} h^n = \Delta^n y + B' \Delta^{n+1} y + B'' \Delta^{n+2} y + \text{ꝛc.}$$

Macht man nun wieder $y = \varepsilon^x$, was $\frac{d^i y}{dx^i} = \varepsilon^x$ und $\Delta^i y = \varepsilon^x (\varepsilon^h - 1)^i$ gibt; so bekommt man durch die Substitution dieser Werthe in die vorhergehende Gleichung:

$$h^n = (\varepsilon^h - 1)^n + B'(\varepsilon^h - 1)^{n+1} + B''(\varepsilon^h - 1)^{n+2} + \text{ꝛc.}$$

Um die Einerleiheit der beiden Seiten dieser Gleichung einzusehen, bemerke man, daß:

$$h^n = [l(1 + \varepsilon^h - 1)]^n = [(\varepsilon^h - 1) - \tfrac{1}{2}(\varepsilon^h - 1)^2 + \ldots]^n.$$

Schreibt man nun Δy statt $\varepsilon^h - 1$ und $\frac{d^n y}{dx^n} h^n$ statt h^n, so erhält man die oben aufgestellte Gleichung:

$$\frac{d^n y}{dx^n} h^n = [l(1+\Delta)]^n y.$$

Drittes Kapitel.

Inverse Differenzenrechnung.

Vom Summiren expliciter Funktionen von einer einzigen Veränderlichen.

§. 67. Die inverse Differenzenrechnung (Summenrechnung) hat zum Zweck, von der in x gegebenen Differenz zu der ursprünglichen Funktion zurückzusteigen, d. h. das allgemeine Glied y_x einer Reihe y_m, y_{m+h}, y_{m+2h}, ... zu finden, wenn das irgend einer beliebigen Differenzreihe bekannt ist; die inverse Differenzenrechnung verhält sich demnach zur direkten, wie die Integralrechnung zur Differenzialrechnung.

Die zu suchende Funktion wird in Bezug auf die gegebene Differenz die Summe oder auch das endliche Integral genannt. Man deutet die Operation, nach welcher aus einer gegebenen Differenz die Summe gefunden wird und welche das Summiren oder endliche Integriren heißt, durch das Zeichen Σ an. Hiernach hat man mit dem Ausdrucke $\Sigma(3x^2+x-2)$ z. B. folgende Idee zu verbinden:

Bei dem constanten und gegebenen Zuwachse $h=1$ der Veränderlichen x erzeugt die gesuchte Funktion y_x eine Reihe, aus welcher sich, wenn man $x=0, 1, 2, 3$ ... setzt, die ersten Differenzen ergeben, die eine andere Reihe bilden, deren allgemeines Glied $3x^2+x-2$

ist, welches für die obigen Werthe von x nach und nach —2, 2, 12, 28 . . . wird. Die in Frage stehende Funktion ist mithin von solcher Beschaffenheit, daß, wenn man in ihr $x+1$ statt x schreibt und beide Resultate von einander abzieht, der Rest $3x^2+x-2$ zum Vorschein kommt.

Wir wollen uns zuvörderst mit denjenigen Differenzen beschäftigen, welche unmittelbar durch die unabhängige Veränderliche ausgedrückt ist, d. h. wo man eine Gleichung von der Form: $\Delta y_x = fx$ hat.

Es ist offenbar $\Sigma\Delta y_x = y_x = \Sigma fx$, so daß die beiden Operationszeichen Δ und Σ einander aufheben, wenn sie sich bei einer und derselben Funktion vorfinden.

Um von $\Delta^i y_x = fx$ auf y_x zu gelangen, muß man so viele Summationen verrichten, als Bildungen von Differenzen stattgefunden haben, was folgendermaßen angedeutet wird:

$$\Sigma^i\Delta^i y_x = y_x = \Sigma^i fx.$$

Allgemeine Summationsregeln sind die zwei folgenden:

1. Aus $\Delta(ay) = a\Delta y$, wo a eine constante Größe bezeichnet, entspringt: $\Sigma\Delta(ay) = ay = a\Sigma\Delta y$;
woraus folgt, daß die beständigen Factoren unter oder außerhalb des Zeichens Σ gestellt werden können.

2. Die Gleichung $\Delta(u-t) = \Delta u - \Delta t$, wo u und t Funktionen von x sind, gibt:

$$\Sigma\Delta(u-t) = u-t = \Sigma\Delta u - \Sigma\Delta t,$$

wonach die Summe einer aus mehrern Theilen bestehenden Funktion auf jene der Monome reducirt wird.

§. 68. Die Aufgabe y_x aus seiner ersten Differenz herzuleiten, enthält nicht die zu einer vollständigen Auflösung erforderlichen Bestimmungsstücke. Denn will man z. B. von der aus y_x entsprungenen ersten Differenzreihe —2, 2, 12, 28 . . . auf die ursprüngliche Reihe wieder zurückgehen; so finden wir, wenn das erste Glied $y_0 = a$ gesetzt wird, durch successive Additionen: a, a—2, a, a+12 . . ., wo a ganz willkührlich bleibt.

Auch kann jede Summe als in der Formel (A) des §. 45 enthalten betrachtet werden: denn macht man in der That nach und nach $x=0$, 1, 2, 3 . . . in der in x ausgedrückten ersten Differenz,

so bildet man die Reihe der ersten Differenzen, aus welcher sich durch successive Subtractionen die zweiten Differenzen, hierauf die 3ten, 4ten . . . ergeben. Indem man die Werthe der Anfangsglieder $\Delta^1 y_0$, $\Delta^2 y_0$ . . . gedachter Reihen in die Formel (A) substituirt, bekommt man den Ausdruck für y_x. So ist in unserm Beispiele:

$\Delta^1 y_0 = -2$, $\Delta^2 y_0 = 4$, $\Delta^3 y_0 = 6$, $\Delta^4 y_0 = 0$ . . . : folglich:

$$y^x = y_0 - 2x - x^2 + x^3,$$

wo das erste Glied y_0 eine willkührliche Constante darstellt, die der gefundenen Summe hinzugefügt werden muß, wenn dieselbe vollständig sein soll. Der Werth dieser willkührlichen Constante wird, wie in der Integralrechnung, aus den besondern Umständen der lösenden Aufgabe bestimmt. Ist die gegebene Funktion eine Differenz von der zweiten Ordnung, so muß man mittelst einer ersten Summation zur ersten Differenz, und von dieser durch eine zweite Summation zu der ursprünglichen Funktion y_x aufsteigen. Bei jeder dieser Operationen muß eine neue Constante hinzugefügt werden, was man auch daraus entnehmen kann, daß die gegebene Gleichung, welche die Differenzen der gesuchten Funktion erst von der zweiten Ordnung an liefert, die beiden Größen y_0, $\Delta^1 y_0$, mithin die zwei ersten Glieder der Formel A) unbestimmt läßt. Aehnliches gilt von den Differenzen der höhern Ordnungen.

Anmerkung. Es ist hier der Ort, darauf aufmerksam zu machen, daß außer den constanten Größen, es auch verschiedene Funktionen gibt, deren Differenzen bei jedem Werthe der Veränderlichen verschwinden. Solche Funktionen sind:

$$\sin\frac{2\pi x}{h},\ \cos\frac{2\pi x}{h},\ f\left(\sin\frac{2\pi x}{h},\ \cos\frac{2\pi x}{h}\right),$$

welche offenbar den nämlichen Werth beibehalten, wenn x in $x+h$ übergeht, wie auch die Form der Funktion f sein mag.

§. 69. Wir wollen nun die Summe Σx^m finden, unter der Voraussetzung, daß m eine positive ganze Zahl ist.

Man hat:

$$\Delta x^{m+1} = (x+1)^{m+1} - x^{m+1} = \frac{(m+1)}{1} x^m h + \frac{(m+1)_m}{1 \cdot 2} x^{m-1} h^2$$

$$+ \frac{(m+1)_m (m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-2} h^3 + \text{rc.}$$

Summirt man die beiden Seiten dieser Gleichung, Glied für Glied, so findet man ohne viele weitere Rechnung:

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \left(\frac{m}{1\cdot 2} h\Sigma x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2\cdot 3} h^2 \Sigma x^{m-2} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{m+1} h^m \Sigma x^0\right).$$

diese Formel gibt, wenn man zuerst $m=0$ setzt, $\Sigma x^0 = \Sigma 1 = \frac{x}{h}$, da sie nur eine Anzahl m mit Σ behafteter Glieder enthalten darf. Die Richtigkeit der Gleichung $\Sigma x^0 = \frac{x}{h}$ läßt sich auch unabhängig von der obigen allgemeinen Formel, wie folgt, nachweisen: Es ist nämlich $\triangle x = h\cdot x^0$, woraus durch Summation entspringt:

$$x = h\Sigma x^0; \text{ mithin } \Sigma x^0 = \Sigma 1 = \frac{x}{h}.$$

Macht man dann in unserer Formel nach und nach $m=1$, 2, 3 . . . und substituirt statt Σx^0, Σx^1, Σx^2 . . . die dafür gefundenen Werthe; so entstehen folgende Resultate:

$$\Sigma x^1 = \frac{x^2}{2h} - \frac{x}{2},$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3h} - \frac{x^2}{2} + \frac{xh}{6},$$

$$\Sigma x^3 = \frac{x^4}{4h} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^2h}{4},$$

$$\Sigma x^4 = \frac{x^5}{5h} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3h}{3} - \frac{xh^3}{30},$$

$$\Sigma x^5 = \frac{x^6}{6h} - \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4h}{12} - \frac{x^2h^3}{12},$$

$$\Sigma x^6 = \frac{x^7}{7h} - \frac{x^6}{2} + \frac{x^5h}{2} - \frac{x^3h^3}{6} + \frac{xh^5}{42}, \text{ u. s. w.,}$$

wo jedem Resultate eine willkührliche Constante beizufügen ist.

§. 70. Anstatt diese Ausdrücke weiter fortzusetzen, schreiben wir im Allgemeinen:

$$\Sigma x^m = Ax^{m+1} + Bx^m + Cx^{m-1} + Dx^{m-2} + \text{ꝛc.}$$

Nimmt man links und rechts die erste Differenz, so kommt:

$$x^m = \frac{A(m+1)}{1} x^m h + \frac{A(m+1)m}{1 \cdot 2} x^{m-1} h^2 + \frac{A(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-2} h^3 + \ldots$$

$$+ B \frac{m}{1} x^{m-1} h + \frac{Bm(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} h^2 + \ldots$$

$$+ \frac{C(m-1)}{1} x^{m-2} h + \ldots$$

$$+ \text{rc.}$$

Durch Vergleichung der die nämliche Potenz von x enthaltenen Glieder findet man zwischen den Coefficienten A, B, C, ... folgende Relationen:

$$A = \frac{1}{(m+1)h},$$

$$B = -\frac{A(m+1)h}{2} = -\tfrac{1}{2},$$

$$C = -\frac{A(m+1)mh^2}{2 \cdot 3} - \frac{Bmh}{2},$$

$$D = -\frac{A(m+1)m(m-1)h^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{Bm(m-1)h^2}{2 \cdot 3} - \frac{C(m-1)h}{2},$$

u. s. w.,

nach denen jeder der Coefficienten A, B, C, D ... durch die vorhergehenden ausgedrückt wird.

Berechnet man danach die zwölf ersten Coefficienten, so hat man zuletzt:

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2} x^m$$

$$+ \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{mh}{2} x^{m-1} - \frac{1}{6 \cdot 5} \frac{m(m-1)(m-2)h^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^{m-3}$$

$$+ \frac{1}{6 \cdot 7} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)h^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} x^{m-5}$$

$$- \frac{3}{10 \cdot 9} \frac{m(m-1) \ldots (m-6)h^7}{2 \cdot 3 \ldots 8} x^{m-7}$$

$$+ \frac{5}{6 \cdot 11} \frac{m(m-1) \ldots (m-8)h^9}{2 \cdot 3 \ldots 10} x^{m-9}$$

$$- \frac{691}{210 \cdot 13} \frac{m(m-1) \ldots (m-10)h^{11}}{2 \cdot 3 \ldots 12} x^{m-11}$$

$$+\frac{35}{2\cdot 15}\,\frac{m(m-1)\;.\;.\;.\;(m-12)h^{13}}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;14}x^{m-13}$$

$$-\frac{3617}{30\cdot 17}\,\frac{m(m-1)\;.\;.\;.\;(m-14)h^{15}}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;16}x^{m-15}$$

$$+\frac{43867}{42\cdot 19}\,\frac{m(m-1)\;.\;.\;.\;.\;(m-16)h^{17}}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;18}x^{m-17}$$

$$-\frac{1222277}{110\cdot 21}\,\frac{m(m-1)\;.\;.\;.\;.\;(m-18)h^{19}}{2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;20}x^{m-19}$$

$$+ \text{ꝛc.} + \text{Const.}$$

§. 71. Diese Formel läßt sich, wenn man die Zahlencoefficienten vom dritten Glied an, deren Gesetz noch nicht einleuchtet, durch B_1, B_3, B_5, . . . bezeichnet, auch folgendermaßen schreiben:

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \tfrac{1}{2}x^m + B_1\frac{mh}{2}x^{m-1} - B_3\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{h^3}{4}\,x^{m-3}$$

$$+B_5\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,\frac{h^5}{6}\,x^{m-5}$$

$$-B_7\frac{m(m-1)(m-2)\;.\;.\;.\;(m-6)}{1\cdot 2\cdot 3\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;7}\,\frac{h^7}{8}\,x^{m-7}$$

$$+ \text{ꝛc.} + \text{Const.}\;.\;.\;.\;(K).$$

Die Coefficienten B_1, B_3, B_5 . . . heißen die **Bernoulli'schen Zahlen**, weil sie von Jakob **Bernoulli** zuerst sind angegeben worden.

Um das Gesetz aufzufinden, welchem diese Coefficienten unterworfen sind, hat Moivre die Summe Σx^m zwischen den Grenzen 0 und h genommen; die Constante verschwindet dann wie bei den bestimmten Integralen.

Da nun $\Sigma x^m(x+h) - \Sigma x^m = \Delta\Sigma x^m = x^m$ ist, ferner die Glieder auf der rechten Seite in (K) für $x=0$ verschwinden; so erhält man auf diesem Wege, nachdem das Ganze durch h^m dividirt worden, folgende Gleichung:

$$0 = \frac{1}{m+1} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}mB_1 - \tfrac{1}{4}\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}B_3 + \tfrac{1}{6}\frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1\cdot 2\;.\;.\;.\;5}B_5$$

$$-\tfrac{1}{8}\frac{m(m-1)\;.\;.\;.\;(m-6)}{1\cdot 2\;.\;.\;.\;.\;.\;7}B_7 + \text{ꝛc.}$$

Setzt man darin successive $m=2, 4, 6, 8 \ldots$, so erhält man zur Bestimmung der Bernoulli'schen Zahlen, folgende Relationen:

$$0=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}+B_1;$$

$$0=\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot 4B_1-B_3;$$

$$0=\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cdot 6B_1-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}B_3+B_5;$$

$$0=\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cdot 8B_1-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}B_3+\tfrac{1}{6}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}B_5-B_7;$$

u. s. w.,

deren Bildungsgesetz hinreichend klar ist.

Anmerkung. Multipliciren wir Σx^m mit h und bringen diesen Zuwachs unter das Zeichen Σ, so entsteht die Gleichung:

$$\Sigma x^m h=\frac{x^{m+1}}{m+1}-\tfrac{1}{2}x^m h+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{mh^2}{2\cdot3}x^{m-1}+ \text{ꝛc.} + \text{Const.},$$

deren zweites Glied die Größe $\frac{x^{m+1}}{m+1}$ zur Grenze hat, wenn h unendlich klein wird, in welchem Falle $\Sigma x^m h$ sich in $\int x^m dx$ verwandelt.

§. 72. Nach dem Gesagten ist es nun leicht die Summationen aller algebraischen, ganzen und rationalen, Ausdrücke vorzunehmen.

So hat man z. B., wenn $h=1$ gesetzt wird:

$$\Sigma(x^3-5x^2+6x-1)=\Sigma x^3-5\Sigma x^2+6\Sigma x-\Sigma 1 + \text{Const.} =$$

$$\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{2}+\frac{x^2}{4}\right)-5\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}\right)+6\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)-x+\text{Const.}=$$

$$\tfrac{1}{12}(3x^4-26x^3+69x^2-58)+\text{Const.}$$

Ebenso ist $\Sigma(x^4-2h^2x^2+h^4)=$

$$\frac{1}{5h}x^5-\tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{1}{3}hx^3+h^2x^2+\tfrac{19}{30}h^3x+\text{Const.}$$

§. 73. Produkte, welche aus äquidifferenten Factoren bestehen, lassen sich leicht summiren. Nimmt man nämlich von dem Produkte

$$y=x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]$$

die Differenz, so erhält man:

$$\Delta y=(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]mh.$$

Hieraus entspringt durch Summation:

$$\Sigma(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]=\frac{x(x+h)(x+2h)\ldots[x+(m-1)h]}{mh}+\text{Const.}:$$

oder, wenn man $x-h$ statt x und $m+1$ statt m schreibt, um die Anzahl der mit dem Zeichen Σ behafteten Factoren auf m zu bringen:

$$\Sigma x(x+h)(x+2h)\ .\ .\ .\ [x+(m-1)h]$$
$$\frac{(x-h)x(x+h)(x+2h)\ .\ .\ .\ [x+(m-1)h]}{(m+1)h}+\text{Const.};$$

welches Resultat der Formel $\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+\text{Const.}$ analog ist.

§. 74. Die vorhergehende Formel kann man auch zur Summation von Funktionen von der Form $Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+$ 2c. benutzen, da dergleichen Funktionen sich in Produkte von äquidifferenten Factoren verwandeln lassen. Man setze z. B.:

$$x^3=(x+h)(x+2h)(x+3h)+A(x+h)(x+2h)+B(x+h)+C.$$

Indem man entwickelt und nach x ordnet, erhält man bei der Vergleichung der mit derselben Potenz von x behafteten Glieder, die Gleichungen:

$$6h+A=0;\ 11h^2+3Ah+B=0;\ 6h^3+2Ah^2+Bh+C=0;$$

aus denen entspringt: $A=-6h$; $B=7h^2$; $C=-h^3$. Folglich:

$$x^3=(x+h)(x+2h)(x+3h)-6h(x+h)(x+2h)+7h^2(x+h)-h^3;$$

was in Folge des vorhergehenden Paragraphen liefert:

$$\Sigma x^3=\frac{1}{4h}x(x+h)(x+2h)(x+3h)-2x(x+h)(x+2h)$$
$$+\tfrac{7}{2}hx(x+h)-h^2x+\text{Const.}$$

§. 75. Nimmt man von dem Bruch

$$y=\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ .\ .\ .\ .\ [x+(m-1)h]}$$

die Differenz, so hat man:

$$\Delta y=\frac{-mh}{x(x+h)(x+2h)\ .\ .\ .\ .\ (x+mh)}.$$

Summirt man, so kommt:

$$\Sigma\frac{-1}{x(x+h)(x+2h)\ .\ .\ .\ .\ (x+mh)}$$
$$=\frac{1}{mhx(x+h)(x+2h)\ .\ .\ .\ .\ [x+(m-1)h]}+\text{Const},$$

oder, wenn man m—1 statt m schreibt:

$$\Sigma\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\ldots\ldots[x+(m-1)h]}$$
$$=\frac{-1}{(m-1)hx(x+h)(x+2h)\ldots\ldots[x+(m-2)h]}+\text{Const.},$$

welches Resultat mit $\int x^{-m}dx=-\frac{1}{m-1}x^{-m+1}+\text{Const.}$ analog ist.

§. 76. Hat die vorgelegte Differenz noch einen von x abhängigen Zähler, oder bilden die Factoren des Nenners keine arithmetische Progression; so zerlegt man die gebrochene Funktion, deren Summe gefunden werden soll, in ihre einfache Partialbrüche, und sucht letztere paarweise dergestalt zu ordnen, daß man jedesmal die Summe eines Paares vermittelst der Formel

$$\Sigma\frac{A}{x+a+h}=\Sigma\frac{A}{x+a}+\frac{A}{x+a}+\text{Const.}$$

zu finden im Stande ist, welche Summenformel sich aus der Gleichung:

$$\frac{A}{x+a+h}-\frac{A}{x+a}=\triangle\frac{A}{x+a}\text{ ergibt.}$$

Um dieses Verfahren zu erläutern, entlehnen wir aus Euler's Anleitung zur Differentialrechnung nachstehende zwei Beispiele:

1. Um $\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}$ zu finden, zerlege man zunächst den gegebenen Bruch in seine Partialbrüche, was gibt:

$$\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{h}\cdot\frac{1}{x+h}-\frac{2}{h}\cdot\frac{1}{x+2h}.$$

Nach der obigen Summenformel ist nun:

$$\Sigma\frac{1}{x}=\Sigma\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x};\text{ folglich:}$$

$$\Sigma\frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)}=\frac{1}{h}\Sigma\frac{1}{x}+\frac{1}{h}\Sigma\frac{1}{x+h}-\frac{2}{h}\Sigma\frac{1}{x+2h}$$
$$=\frac{2}{h}\Sigma\frac{1}{x+h}-\frac{2}{h}\Sigma\frac{1}{x+2h}-\frac{1}{hx}.$$

Nach der nämlichen Formel ist aber wieder:

$$\Sigma\frac{1}{x+h}=\Sigma\frac{1}{x+2h}-\frac{1}{x+h};$$

daher die gesuchte Summe:

$$\Sigma \frac{3x+2h}{x(x+h)(x+2h)} = -\frac{1}{hx} - \frac{2}{h(x+h)} = -\frac{3x+h}{hx(x+h)}.$$

2. Für die Summe $\Sigma \frac{3h}{x(x+3h)}$ hat man:

$$\Sigma \frac{3h}{x(x+3h)} = \Sigma \frac{1}{x} - \Sigma \frac{1}{x+3h} = \Sigma \frac{1}{x+h} - \Sigma \frac{1}{x+3h} - \frac{1}{x}$$

$$= \Sigma \frac{1}{x+2h} - \Sigma \frac{1}{x+3h} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+h}$$

$$= -\frac{1}{x} - \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x+2h}.$$

Auf diese Weise lassen sich die Summen der gegebenen Differenzen finden, insofern sich die Summenzeichen Σ gegenseitig aufheben.

§. 77. Wir übergehen die Summen der irrationalen algebraischen Funktionen, über welche man wenig Bestimmtes weiß, und wenden uns zu den Summen einiger der wichtigsten transcendenten Funktionen.

Aus $\Delta a^x = a^x(a^h - 1)$ (§. 41) folgt:

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h - 1} + \text{Const.}$$

Aus $\Delta \log x = \log\left(1 + \frac{h}{x}\right)$ (§. 41) entspringt:

$$\Sigma \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) = \log x + \text{Const.} = \log cx,$$

da man jede Constante als den Logarithmus einer andern Constanten in jedem beliebigen Systeme ansehen kann.

§. 78. Die Formeln des §. 42, nämlich:

$$\Delta \sin x = 2 \sin \tfrac{1}{2} h \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

$$\Delta \cos x = -2 \sin \frac{h}{2} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)$$

geben: $\Sigma \sin\left(x + \frac{h}{2}\right) = -\frac{\cos x}{2 \sin \frac{h}{2}} + \text{Const.},$

$$\Sigma \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{h}{2}} + \text{Const.};$$

oder, wenn man darin $x - \frac{h}{2}$ statt x schreibt,

$$\Sigma \sin x = -\frac{\cos\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} + \text{Const.},$$

$$\Sigma \cos x = \frac{\sin\left(x-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}} + \text{Const.}$$

Um Funktionen der Potenzen der Sinus und Cosinus zu summiren, wird man vorerst solche in Funktionen von Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen umformen, wodurch man eine Folge von Gliedern von der Form $A \sin qx$ oder $A \cos qx$ erhält, deren Summen sich aus denjenigen von $A \sin x$ und $A \cos x$ ableiten lassen, wenn man qx und qh statt x und h schreibt.

Anmerkung. Die allgemeinen Formeln, die man hier anwendet, sind:

$$\Sigma \sin(p+qx) = -\frac{\cos(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{qh}{2}} + \text{Const.}$$

$$\Sigma \cos(p+qx) = \frac{\sin(p+qx-\frac{1}{2}qh)}{2\sin\frac{qh}{2}} + \text{Const.}$$

Kommt dabei ein constantes Glied A vor, so erhält die Summe noch das Glied $\frac{Ax}{h}$.

§. 79. Nach diesen Versuchen, die Summen von besonderen Funktionen zu finden, wollen wir noch eine allgemeine Reductionsformel angeben. Es seien deshalb P und Q zwei beliebige Funktionen von x; man mache:

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P + z,$$

wo z eine unbekannte Funktion der nämlichen Variabeln bedeutet.

Nimmt man beiderseits die Differenz, so erhält man:

$$PQ = (Q+\Delta Q)\Sigma(P+\Delta P) - Q\Sigma P + \Delta z,$$

oder, wenn man entwickelt und reducirt,

$$0 = \Delta Q \Sigma(P+\Delta P) + \Delta z,$$

in Erwägung, daß $Q\Sigma\Delta P = PQ$ ist.

Folglich: $z = -\Sigma\Delta Q\Sigma(P+\Delta P)$;

hierauf: $\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma(P+\Delta P),$

oder, wenn man P_1 für $P + \Delta P$ schreibt:

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma\Delta Q\Sigma P_1 \quad \ldots \quad (L),$$

Formel analog jener der theilweisen Integration bei den Differentialen.

Wendet man auf die Summe im zweiten Gliede rechts dieser Gleichung dieselbe Formel an, schreibt demnach ΔQ statt Q und ΣP_1 statt P; so leitet man daraus ab:

$$\Sigma\Delta Q\Sigma P_1 = \Delta Q\Sigma^2 P_1 - \Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2,$$ wenn man erwägt, daß:

$$\Sigma P_1 + \Delta\Sigma P_1 = \Sigma(P_1 + \Delta P_1) = \Sigma P_2.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes in die Formel (L) ergibt sich dann:

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Sigma\Delta^2 Q\Sigma^2 P_2.$$

Wendet man auf das dritte Glied rechts der letztern Gleichung abermals die Formel (L) an, so erhält man nach geschehener Substitution und in Erwägung, daß:

$$\Sigma^2 P_2 + \Delta\Sigma^2 P_2 = \Sigma^2 P_3:$$

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Sigma\Delta^3 Q\Sigma^3 P_3.$$

Auf diese Weise weiter fortgefahren, findet man folgende von Taylor in den »philosophical transactions« gegebene Formel:

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q\Sigma^2 P_1 + \Delta^2 Q\Sigma^3 P_2 - \Delta^3 Q\Sigma^4 P_3 + \Delta^4 Q\Sigma^5 P_4 - \text{ꝛc.}$$

Condorcet hat ihr in seinem »Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions« eine andere Gestalt gegeben, indem er statt P_1, P_2, P_3 ... deren Werthe in P einführt und die möglichen Summationen verrichtet. Auf solche Weise erhielt Condorcet die Formel:

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Delta Q(\Sigma^2 P + \Sigma P) + \Delta^2 Q(\Sigma^3 P + 2\Sigma^2 P + \Sigma P)$$
$$- \Delta^3 Q(\Sigma^4 P + 3\Sigma^3 P + 3\Sigma^2 P + \Sigma P) + \text{ꝛc.}$$

Dieselbe ist geschlossen, so oft Q eine ganze Funktion von x ist, und führt zu der genauen Summe von PQ, wenn die Funktion P eine hinreichende Anzahl von successiven Summationen gestattet.

§. 80. Nach diesen Formeln kann man daher summiren:

1. Jede Funktion von der Form:

$$\frac{Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \ldots}{x(x+h)(x+h) \ldots [x+(m-1)h]},$$

wenn α, β, γ .... ganz positive Zahlen und zu gleicher Zeit $< m-1$ die größte derselben ist.

2. Jede Funktion von der Form:

$$a^{mx}(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}\ \ldots\ldots),$$

wenn α, β, γ ... positiv ganz sind, m mag eine positive oder negative ganze Zahl sein.

3. Jede Funktion von der Form:

$$\sin^{m}x \cos^{n} x\,(Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}\ \ldots\ldots),$$

wenn m und n positiv ganz, wie α, β, γ ... sind.

Diese drei Formen begreifen fast alle Fälle in sich, in denen man die Summen der Funktionen von einer einzigen Veränderlichen zu finden im Stande ist.

§. 81. Wenn man die Summe Σy nicht genau finden kann, so nimmt man zu den Reihen seine Zuflucht. Euler macht jene Summe von den Differentialcoefficienten von y und von dem Integral $\int y dx$ abhängig. Zu diesem Behufe geht man von der Taylor'schen Formel

$$\triangle z = \frac{dz}{dx}h + \frac{d^2z}{dx^2}\frac{h^2}{1\cdot2} + \frac{d^3z}{dx^3}\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3} + \text{ꝛc.}$$ aus, welche liefert:

$$z = \frac{h}{1}\Sigma\frac{dz}{dx} + \frac{h^2}{1\cdot2}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} + \text{ꝛc.}$$

Macht man nun $\frac{dz}{dx} = y$, so kommt:

$$\Sigma y = \frac{1}{h}\int y dx - \frac{1}{1\cdot2}h\Sigma\frac{dy}{dx} - \frac{h^2}{6}h^2\Sigma\frac{d^2y}{dx^2} - \text{ꝛc.}$$

Setzt man hier nach und nach $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dz^2}$ .... statt y, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, mittelst deren die Ausdrücke $\Sigma\frac{dy}{dx}$, $\Sigma\frac{d^2y}{dx^2}$ .... aus dem Werthe von Σy eliminirt werden können, so daß man ein Resultat von der Form:

$$\Sigma y = \frac{1}{h}\int y dx + Ay + A_1 h\frac{dy}{dx} + A_2 h^2\frac{d^2y}{dx^2} + \text{ꝛc.}$$ hat.

Um die Coefficienten A, A_1, A_2 ... zu bestimmen, mache man $y = x^m$; man erhält dann die Formel:

$$\Sigma x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} + Ax + mA_1hx^{m-1} + m(m-1)A_2h^2x^{m-2}$$
$$+ m(m-1)(m-2)A_3h^3x^{m-3} + m(m-1)(m-2)(m-3)A_4h^4x^{m-4} + \text{ꝛc.},$$

welche mit der Formel (K) des §. 71 übereinstimmen muß.

Aus der vergleichenden Zusammenstellung dieser zwei Formeln entspringen folgende Relationen:

$$A = -\tfrac{1}{2};\; A_1 = \frac{B_1}{2};\; A_2 = 0;\; A_3 = -\frac{B_3}{1\cdot2\cdot3\cdot4};$$

$$A_4 = 0;\; A_5 = \frac{B_5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6};\text{ oder allgemein:}$$

$$A_{2n+2} = 0 \text{ und } A_{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{B_{2n+1}}{1\cdot2\cdot3\;.\;.\;.\;(2n+2)},$$

wo n Null oder jede beliebige ganze positive Zahl bedeutet.

Hiernach hat man für Σy folgenden Ausdruck:

$$\Sigma y = \frac{1}{h}\int y dx - \tfrac{1}{2}y + B_1\frac{dy}{dx}\,\frac{h}{2} + B_3\frac{d^3y}{dx^3}\,\frac{h^3}{2\cdot3\cdot4} + \text{ꝛc.} + \text{Const} \;.\;.\;.\;.\; (M).$$

§. 82. Die Coefficienten A, A_1, A_2 ... lassen sich noch auf anderm Wege finden, nämlich durch die Betrachtung der speciellen Funktion ε^x, für welche

$$\Sigma\varepsilon^x = \frac{\varepsilon^x}{\varepsilon^h - 1},\; \int \varepsilon^x dx = \varepsilon^x,\; \frac{d^n\cdot\varepsilon^x}{dx^n} = \varepsilon^x \text{ ist.}$$

Es entsteht daraus:

$$\frac{1}{\varepsilon^h - 1} = \frac{1}{h} + A + A_1h + A^2h^2 + \text{ꝛc.},$$

wonach die fraglichen Coefficienten keine anderen, als diejenigen des nach den steigenden Potenzen von h entwickelten Ausdruckes

$$\left(\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1\cdot2} + \frac{h^3}{1\cdot2\cdot3} + \text{ꝛc.}\right)^{-1} \text{ sind.}$$

§. 83. Man kann auf dieselbe Art die Summe Σ^2y, Σ^3y, und im Allgemeinen $\Sigma^n y$ erhalten. In der That führt die im §. 62 angegebene Formel des La Place zu:

$$z = h^n\Sigma^n\frac{d^n z}{dx^n} + A'h^{n+1}\Sigma^n\frac{d^{n+1}z}{dx^{n+1}} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man hierauf $\frac{d^n z}{dx^n} = y$, so hat man:

$$\Sigma^n y = \frac{1}{h^n}\int^n y dx^n - A'h\Sigma^n\frac{dy}{dx} - A''h^2\Sigma^n\frac{d^2y}{dx^2} - \text{ꝛc.}$$

Schreibt man nun successive $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ... für y, so erhält man eine Reihe von Gleichungen, mittelst derer die Ausdrücke $\Sigma^n \frac{dy}{dx}$, $\Sigma^n \frac{d^2y}{dx^2}$ ... aus dem Werthe $\Sigma^n y$ weggeschafft werden können.

Man erhält so das Endresultat:

$$\Sigma^n y = \frac{1}{h^n}\int^n y dx^n + \frac{A}{h^{n-1}}\int^{n-1} y dx^{n-1} + \frac{B}{h^{n-2}}\int^{n-2} y dx^{n-2} + \ldots$$
$$+ \frac{N}{h}\int y dx + P + Qh\frac{dy}{dx} + Rh^2\frac{d^2y}{dx^2} + \text{etc.}$$

Macht man wieder $y = \varepsilon^x$, so geht dasselbe in

$$\frac{1}{(\varepsilon^h - 1)^n} = \frac{1}{h} + \frac{A}{h^{n-1}} + \frac{B}{h^{n-2}} \ldots + \frac{N}{h} + P + Qh + Rh^2 + \text{etc.}$$

über; die Coefficienten A, B, C ... sind folglich hier abermals mit denjenigen übereinstimmend, welche die Potenzen von h in der Entwickelung von $(\varepsilon^h - 1)^{-n}$ multiplicieren.

Anmerkung. Aus dem Vorhergehenden folgt, daß man

$$\Sigma^n y = \left(\varepsilon^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)^{-n} y$$

schreiben kann, insofern man nach der Entwickelung jedem Gliede von der Form $\frac{d^{-m}}{dx^{-m}}h^{-m}$ unmittelbar hinter d^{-m} den Faktor y setzt, und diese Ausdrücke d^{-m} in $\int^m$ umwandelt, dergestalt, daß $\frac{d^{-m}y}{dx^{-m}}h^{-m}$ in $\frac{1}{h^m}\int^m y dx^m$ übergeht. Ueberdieß läßt sich der obige Ausdruck aus dem von $\Delta^n y$ (§. 62) dadurch ableiten, daß man dem Exponenten n das Zeichen — beilegt, wodurch die zwischen den Differenzen und positiven Potenzen bestehende Analogie auch auf die Summen und negativen Potenzen ausgedehnt wird.

§. 84. Wir wollen jetzt an ein Paar Beispielen die Anwendung der Formel (M) zeigen.

1. Für die Summe Σlx erhält man damit, wenn $h = 1$ angenommen wird:

$$\Sigma lx = \text{Const.} + xlx - x - \tfrac{1}{2}lx + \tfrac{1}{12}x + \text{etc.}$$

2. Für die Summe $\Sigma \frac{1}{x}$ findet man:

$$\Sigma \frac{1}{x} = \text{Const.} + \frac{1}{h} lx - \frac{1}{2x} - \frac{B_1 h}{2x^2} - \frac{B_3 h^3}{4x^4} - \frac{B_5 h^5}{6x^6} - \text{etc.}$$

Summation der Reihen.

§. 85. Eine vielfache Anwendung findet die Summenrechnung bei der Bestimmung des summatorischen Gliedes einer Reihe, d. h. bei der Ermittelung der Summe einer gewissen Anzahl von Gliedern derselben. Es sei Sx das summatorische Glied einer beliebigen Reihe

$$y_0, y_1, y_2, y_3 \ldots;$$

mithin: $Sx-1 = y_0 + y_1 + y_2 \ldots + y_{x-1}$,

und: $Sx = y_0 + y_1 + y_2 \ldots + y_x$;

woraus: $Sx - Sx-1 = \triangle Sx-1 = y_x$.

Nimmt man von der letzten Gleichung wieder die Summe, so kommt: $Sx-1 = \Sigma y_x + \text{Const.}$

Um also das summatorische Glied Sx einer Reihe zu erhalten, muß man x mit $x+1$ in dem allgemeinen Glied y_x vertauschen und dann summiren, oder in der Summe Σy_x die Veränderliche x mit $x+1$ verwechseln.

Man hat ferner $Sx = \Sigma y_x + y_x + \text{Const.}$; d. h. man findet auch das summatorische Glied Sx einer Reihe, wenn man zu der Summe Σy_x das allgemeine Glied y_x hinzufügt. — Die willkührliche Constante bestimmt man gewöhnlich dadurch, daß das summatorische Glied $= y_0$ ist, wenn $x=0$ wird.

Anmerkung. Läßt man die Reihe bei dem Gliede anfangen, welches dem Stellenzeiger $x = a$ entspricht und hat man $Sy_x = Fx + \text{Const.}$ gefunden; so wird

$$Fa + \text{Const.} = y_a;$$

woraus: $\text{Const.} = y_a - Fa$,

und: $Sy_x = Fx - Fa + y_a$.

Endigt die Reihe mit dem Gliede, welches dem Stellenzeiger $a+nh$ entspricht; so hat man:

$$y_a + y_{a+h} \ldots + y_{a+nh} = F(a+nh) - Fa + y_a,$$

was sich auf $y_{a+h} \ldots + y_{a+nh} = F(a+nh) - Fa$ reducirt.

Das Glied y_x macht folglich, wie es zu erwarten war, keinen Theil der zwischen den Grenzen $x=a$ und $x=a+h$ genommenen Summe aus. Soll jedoch jenes Glied y_a mit in der Summe begriffen sein, so muß man dieselbe zwischen den Grenzen $x=a-h$ und $x=a+nh$ nehmen.

§. 86. Wir wollen jetzt zu Anwendungen dieser allgemeinen Summirungsformeln übergehen.

1. Das summatorische Glied der Reihe zu finden, deren allgemeines Glied $y_x=x(2x-1)$ ist. Man vertausche x mit $x+1$ in $x(2x-1)$ und summire dann das Resultat. Man findet auf diese Art:

$$Sx(2x-1)=2\Sigma x^2+3\Sigma x+\Sigma x^0=\frac{4x^3+3x^2-x}{2\cdot 3}=x\,\frac{(x+1)}{2}\cdot\frac{(4x-1)}{3}.$$

Es wird keine Constante hinzugefügt, weil für $x=0$ die Summe verschwindet.

2. Um Sx^m, d. h. die Summe der Glieder der Reihe 1^m, 2^m, 3^m, 4^m ... zu finden, muß man zu dem in der Formel (K) des §. 71 aufgestellten Werthe Σx^m noch das Glied x^m hinzuaddiren, oder mit andern Worten, das zweite Glied $-\frac{1}{2}x^m$ jener Formel in $+\frac{1}{2}x^m$ umändern. Die Constante wird hierauf nach dem Gliede bestimmt, bei welchem man die Reihe beginnen lassen will. — Für die Summe der Quadrate z. B. erhält man:

$$Sx^2=\tfrac{1}{3}x^3+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{6}x=x\,\frac{(2x+1)(x+1)}{2\cdot 3}$$

wo die Constante Null ist, weil die Summe für $x=0$ verschwindet. Soll dagegen die Summe sich von n^2 bis x^2 erstrecken, so läßt man die Summe für $x=n-1$ verschwinden: es stellt sich dann die Constante

$$-\frac{n(n-1)(2n-1)}{2\cdot 3}\text{ heraus.}$$

§. 87. Das summatorische Glied der direkten Reihen der figurirten Zahlen (siehe §. 15 der höhern Algebra) läßt sich nach dem, was in §. 73 gesagt worden, finden.

Es haben hiernach die Reihen,

deren allgemeines Glied ist:	das summatorische Glied:
$\frac{x}{1}$	$\frac{x(x+1}{2}$
$\frac{x(x+1)}{1 \cdot 2}$	$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$
$\frac{x(x+1)(x+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$
$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$\frac{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$
u. s. w.,	u s. w.,

wo die willkührlichen Constanten weggelassen sind, weil diese Ausdrücke für $x = 0$ verschwinden.

§. 88. Eben so leicht können mit Hülfe der im §. 75 gegebenen Summenformel die summatorischen Glieder der inversen Reihen der figurirten Zahlen gefunden werden, d. h. jener Reihen, deren Zähler die Einheit, und Nenner die auf einander folgenden figurirten Zahlen sind.

Es haben hiernach die Reihen,

deren allgemeines Glied ist:	das summatorische Glied:
$\frac{1 \cdot 2}{x(x+1)}$	$\frac{2}{1} - \frac{2}{x+1}$,
$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x(x+1)(x+2)}$	$\frac{3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{(x+1)(x+2)}$,
$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$	$\frac{4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(x+1)(x+2)(x+3)}$,
$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$	$\frac{5}{4} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$,
u. s. w.;	u. s. w.;

wobei die Constanten dadurch bestimmt wurden, daß man die Summen beim ersten Gliede anfangen läßt, welches in sämmtlichen Reihen die Einheit ist. Um die Totalsumme der ohne Ende fortgesetzten Reihen zu erhalten, muß man x unendlich groß nehmen; die Grenzen der betrachteten Reihen sind dann:

$\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$ u. s. w.

§. 89. Für die Reihe $\sin a$, $\sin(a+h)$, $\sin(a+2h)$ ... hat man nach §. 78:

$$\Sigma \sin(a+hx) = C - \frac{\cos(a+hx-\frac{1}{2}h)}{2\sin\frac{h}{2}}.$$

Aendert man darin x in x+1 um und bestimmt die Constante C der Bedingung gemäß, daß für x=−1 die Summe verschwindet; so erhält man:

$$S\sin(a+hx) = \frac{\cos\left(a-\frac{h}{2}\right) - \cos\left(a+hx+\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}},$$

$$\text{oder: } S\sin(a+hx) = \frac{\sin\left(a+\frac{hx}{2}\right)\cdot\sin\frac{h}{2}(x+1)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Auf dieselbe Art findet man für die Reihe $\cos a$, $\cos(a+h$, $\cos(a+2h)$ ... das summatorische Glied:

$$S\cos(a+hx) = \frac{\cos\left(a+\frac{hx}{2}\right)\sin\frac{h}{2}(x+1)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

§. 90. Nimmt man in der Formel (M) des §. 81 $y=\sin ax$, so erhält man, wegen $S\sin ax = \Sigma\sin ax + \sin ax$ einerseits:

$$S\sin ax = -\frac{1}{a}\cos ax + \tfrac{1}{2}\sin ax + \frac{B_1 a}{2}\cos ax + \frac{B_3 x^3}{2\cdot3\cdot4}\cos ax + \text{ꝛc.} + C.$$

Da für x=0 die Größe $S\sin ax$ verschwindet, so bekommt man:

$$C = \frac{1}{a} - \frac{B_1 a}{2} - \frac{B_3 a^3}{2\cdot3\cdot4} - \text{ꝛc.};$$

$$\text{folglich: } S\sin ax = \tfrac{1}{2}\sin ax + (1-\cos ax)\left(\frac{1}{a} - \frac{B_1 a}{2} - \frac{B_3 a^3}{2\cdot3\cdot4} - \text{ꝛc.}\right).$$

Andererseits hat man, wegen $\Sigma\sin ax = -\dfrac{\cos\left(ax-\frac{a}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}} + C$,

$$S \sin ax = -\frac{\cos\left(ax - \frac{a}{2}\right)}{2 \sin \frac{a}{2}} + \sin ax + C;$$

oder: $$S \sin ax = \tfrac{1}{2} \sin ax + \frac{\cos \frac{a}{2}\,(1 - \cos ax)}{2 \sin \frac{a}{2}},$$

wenn man die Constante, wie vorhin, dadurch bestimmt, daß für $x=0$ die Summe $S \sin ax$ verschwindet.

Aus der Zusammenstellung der beiden Ausdrücke von $S \sin ax$ entspringt:

$$\tfrac{1}{2} \cot \frac{a}{2} = \frac{1}{a} - \frac{B_1 a}{2} - \frac{B_3 a^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{B_5 a^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \text{ꝛc.}$$

§. 91. Die Summe jeder Menge von Logarithmen aus der Reihe $l_1 + l_2 + l_3 \ldots$ aufzufinden, wo l hyperbolische Logarithmen andeuten, da die gewöhnlichen leicht darauf zurückgeführt werden.

Man hat nach §. 84:

$$S\,lx = C + x\,lx - x + \tfrac{1}{2} lx + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{ꝛc.}$$

Für die Constante C erhält man, weil $S\,lx$ verschwindet, wenn $x=1$ wird: $$C = 1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{360} + \text{ꝛc.}$$

eine zur Bestimmung des Werthes von C nicht brauchbare Reihe, in dem sie zuletzt stark divergirt.

Um die Constante C kennen zu lernen, verfahren wir mit Euler auf folgende Art. Wir setzen nämlich in den beiden in der Note XI der höhern Algebra für $\sin x$ und $\cos x$ aufgeführten Ausdrücken:

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \ldots \text{ und}$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{25\pi^2}\right) \ldots$$

$x = \frac{m\pi}{n}$. Es entsteht dadurch:

$$\sin x = \frac{m\pi}{n}\left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)$$
$$\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\ldots;$$

und
$$\cos x = \left(\frac{n-2m}{n}\right)\left(\frac{n+2m}{n}\right)\left(\frac{3n-2m}{3n}\right)\left(\frac{3n+2m}{3n}\right)$$
$$\left(\frac{5n-2m}{5n}\right)\left(\frac{5n-2m}{5n}\right)\left(\frac{5n-2m}{5n}\right)\ldots.$$

Wird nun $x=\frac{1}{4}\pi$ gesetzt, so ist $m=1$ und $n=4$; mithin:

$$\sin 45^0 = \frac{\pi}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{9}{8}\cdot\tfrac{11}{12}\cdot\tfrac{13}{12}\cdot\tfrac{15}{16}\cdot\tfrac{17}{16}\ldots;$$

und
$$\cos 45^0 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{7}{6}\cdot\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{11}{10}\cdot\tfrac{13}{14}\cdot\tfrac{15}{14}\ldots.$$

Hieraus, weil $\sin 45^0 = \cos 45^0$ ist,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\ldots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\ldots}$$

Nimmt man davon die Logarithmen, so kommt:

$$l\pi - l2 = 2l2 + 2l4 + 2l6 + 2l8 \ldots 2l(2x-2) + l2x$$
$$-l1 - 2l3 - 2l5 - 2l7 \ldots -2l(2x-3) - 2l(2x-1).$$

Mittelst des obenstehenden Werthes von Slx erhält man für $x=\infty$ folgende Ausdrücke:

$$l1 + l2 + l3 \ldots + lx = C + (x+\tfrac{1}{2})lx - x,$$
$$l1 + l2 + l3 \ldots + l2x = C + (2x+\tfrac{1}{2})l2x - 2x,$$
$$l2 + l4 + l6 + \ldots + l2x = C + (x+\tfrac{1}{2})lx - x + xl2.$$

Indem die dritte Reihe von der zweiten abgezogen wird, ergibt sich: $l1 + l3 + l5 + l7 \ldots + l(2x-1) = xlx + (x+\tfrac{1}{2})l2 - x.$

Daraus folgert man nun;

$$2l2 + 2l4 + 2l6 \ldots 2l(2x-1) + l2x - 2l1 - 2l3 - 2l5 \ldots$$
$$-2l(2x-3) - 2l(2x-1)$$
$$= 2C + 2(x+\tfrac{1}{2})lx + 2xl2 - 2x - l2x - 2xlx - 2(x+\tfrac{1}{2})l2 + 2x,$$

oder, in Erwägung, daß die erste Seite dieser Gleichung $= l\pi - l2$ ist, $l\pi - l2 = 2C - 2l2$; mithin $C = \frac{1}{2}l2\pi$.

In Folge dieses Werthes der Constante erhält man:

$$Slx = \tfrac{1}{2}l2\pi + xlx - x + \tfrac{1}{2}lx + \frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \text{etc.},$$

wo die Logarithmen hyperbolisch sind.

Handelt es sich um gewöhnliche Logarithmen, so muß man die Glieder, worin kein Logarithm vorkommt, mit dem Modul $m = 0,43429448\ldots$ dieses Systems multipliciren und in den Gliedern $\frac{1}{2}l2\pi + (x + \frac{1}{2})lx$ für $l2\pi$ und lx die gewöhnlichen Logarithmen nehmen. Um ein Beispiel hiervon zu haben, wollen wir die Berechnung der Summe der gewöhnlichen Logarithmen der 1000 ersten Zahlen, d. h. des Werthes von $l1 + l2 + l3\ldots + l1000$, hier hersetzen.

Es ist also: $x = 1000$ und $lx = 3$.

Hiernach:

$$\begin{array}{rl} xlx = & 3000,\ 000000000000 \\ +\frac{1}{2}lx = & 1,\ 500000000000 \\ +\frac{1}{2}l\pi = & 0,\ 399089934179 \\ -mx = & -434,\ 294481903252 \\ +\frac{m}{12x} = & +\ 0,\ 000036191206 \\ -\frac{m}{360x^3} = & -\ 0,\ 000000000001 \\ \hline \end{array}$$

Resultat . . . . $2567,\ 604644222132$.

Es erhellet hieraus, daß das Produkt von tausend Zahlen $1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots1000$ aus 2568 Ziffern besteht und daß die sieben ersten Ziffern links 4023872 sind; das fragliche Produkt liegt demnach zwischen den Zahlen 4023872 und 4023873, wenn in jeder noch 2561 Nullen folgen.

§. 92. Aus dem Werthe von $\int\frac{1}{x}$ (§. 84) lassen sich mehrere interessante Folgerungen ziehen.

Es ist nämlich:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{3m}\ldots + \frac{1}{mx} = \frac{1}{m}\left\{lx + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} - \frac{B_3}{4x^4} - \text{ꝛc.} + C;\right\}$$

ferner hat man, wenn x in mx umgeändert wird,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\ldots + \frac{1}{mx} = \left\{lmx + \frac{1}{2mx} - \frac{B_1}{2m^2x^2} - \text{ꝛc.} + C\right\}.$$

Indem man von dieser Reihe die vorhergehende $m$mal genommen abzieht, bekommt man:

$$\left.\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}\ldots+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m+1}\ldots+\frac{1}{mx} \\ \quad -\frac{m}{m} \qquad\qquad\qquad\qquad -\frac{m}{2m} \qquad\qquad -\frac{m}{mx} \\ \quad lm+\frac{1}{2x}\left(\frac{1}{m}-1\right)-\frac{B_1}{2x^2}\left(\frac{1}{m^2}-1\right)-\text{ꝛc.,} \end{array}\right\}$$

wovon der zweite Theil lm zur Grenze hat, wenn x unendlich wird. Schreibt man statt m nach und nach die Zahlen 2, 3, 4 . . ., so entsteht:

$$l2=1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{8}+\text{ ꝛc.};$$
$$l3=1+\tfrac{1}{2}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{2}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{2}{9}+\text{ ꝛc.};$$
$$l4=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{3}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{3}{8}+\text{ ꝛc.};$$
$$l5=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{4}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{4}{10}+\text{ ꝛc.; u. s. w.}$$

§. 93. Betrachten wir die Reihe $1+\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{4^m}\ldots+\frac{1}{x^m}$, so haben wir:

$$S\frac{1}{x^m}=-\frac{1}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{1}{2x^m}-\frac{mB_1}{2x^{m+1}}-\frac{m(m+1)(m+2)B_3}{2\cdot3\cdot4x^{m+3}}+\text{ꝛc.}+C,$$

eine Reihe, welche sehr convergirt, wenn x ein wenig groß wird.

Es läßt sich diese Eigenschaft mit Vortheil benutzen, um den Werth der Constante C aus irgend einem Falle, in welchem die Summe wirklich gefunden ist, zu bestimmen. Setzen wir z. B. für $m=2$ zu diesem Behuf $x=10$ und addiren die zehn ersten Glieder wirklich, so finden wir: $C=1,6449340668482264$;

wobei zu bemerken ist, daß dieser Werth von C, wie weit sich auch der Grad der Annäherung erstrecken mag, mit dem des Ausdruckes $\frac{\pi^2}{6}$ übereinstimmt, wo π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser darstellt.

Für $m=3$ und $x=10$ erhalten wir:

$$C=1,2020569031595942.$$

Indem wir auf diese Art weiter fortgehen, finden wir die Summe aller umgekehrten Potenzreihen der natürlichen Zahlen in Decimalbrüchen ausgedrückt.

Es entsteht hiernach folgende Tabelle:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+ \text{ꝛc. ohne Ende} = \infty;$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{4}{4^2}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^2}{6} \text{ genau;}$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^3}{25,79436} \text{ näherungsweise;}$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^4}{90} \text{ genau;}$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^5}{295,1215} \text{ näherungsweise;}$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^6}{945} \text{ genau;}$$

$$1+\frac{1}{2^7}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^7}{2295,286} \text{ näherungsweise;}$$

$$1+\frac{1}{2^8}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^8}{9450} \text{ genau;}$$

$$1+\frac{1}{2^9}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^9}{29749,35} \text{ näherungsweise;}$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+ \ldots\ldots = \frac{\pi^{10}}{93555} \text{ genau; u. s. w.}$$

Es lassen sich also mittelst der Bernoulli'schen Zahlen und der Größe π alle bis ins Unendliche fortlaufenden Reihen, deren allgemeines Glied $\frac{1}{x^{2n}}$ ist, summiren.

§. 94. Für $y = a^x$ erhalten wir mittelst der Formel (M):

$$a^x = \Sigma a^x + a^x = a^x \left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2} la + \frac{B_3}{2\cdot3\cdot4}(la)^3 + \text{ꝛc.}\right) + C.$$

Setzt man $Sa^x = 0$ für $x = 0$, so ergibt sich:

$$C = -\frac{1}{la} - \frac{1}{2} - \frac{B_1}{2} la - \text{ꝛc.}; \text{ folglich:}$$

$$Sa^x = (a^x - 1)\left(\frac{1}{la} + \frac{1}{2} + \frac{B_1}{2} la + \text{ꝛc.}\right)$$

Nun ist $Sa^x = \frac{(a^x - 1)a}{a-1}$; mithin:

$$\frac{(a+1)la}{2(a-1)} = 1 + \frac{B_1}{2}(la)^2 + \frac{B_3}{2\cdot3\cdot4}(la)^4 + \text{ꝛc.},$$

so daß sich die Summe der letztern Reihe genau angeben läßt.

Wer sich über die Summation der Reihen und der daraus gewonnenen Resultate ausführlicher unterrichten will, den verweisen wir auf:

1. Euler's Anleitung zur Differentialrechnung. Zweiter Theil, 6tes und 7tes Kapitel.
2. Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Erster Theil, 10tes Kapitel.
3. Traité du calcul différential et intégral, par Lacroix. Tome troisième. Chapitre II.
4. Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik. Band II. IV. V. VII. XIV. XV. XVI. ꝛc.

Vom Summiren impliciter Funktionen von einer Veränderlichen.

§. 95. Wir wollen uns jetzt mit den Differentialgleichungen beschäftigen, d. h. mit denjenigen Fällen, wo man eine Gleichung zwischen der Funktion y, deren Differenzen Δy, $\Delta^2 y$ ... und der unabhängigen Veränderlichen x, bei einem bekannten Zuwachse h der letztern, hat. Eine derartige Gleichung wird im Allgemeinen die Form haben:

$$F(x, y, \Delta y, \Delta^2 y \ldots) = 0.$$

und zwar von der $n$ten Ordnung sein, wenn zuletzt noch $\Delta^n y$ vorkommt. Man kann darin die Differenzen durch die aufeinander folgenden Werthe von y ersetzen, weil nach §. 46

$$\Delta y = y_1 - y,\ \Delta^2 y = y_2 - 2y_1 + y \text{ u. s. w. ist,}$$

so daß jene Gleichung die Form

$$F(x, y, y_1, y_2 \ldots) = 0$$

annimmt, woraus erhellet, daß jede Differenzengleichung den Werth der gesuchten Funktion durch die unabhängige Veränderliche x und eine bestimmte Anzahl vorhergehender Werthe ausgedrückt liefert. Wäre also die Differenzengleichung von der ersten Ordnung, so würde

solche y_1 in x und y liefern; wäre sie von der zweiten, so bekäme man aus ihr y_2 durch x, y und y_1 ausgedrückt, u. s. w. Jede Differenzengleichung kommt demnach einer Reihe gleich, in welcher man vermittelst der Relation jedes Glied durch seinen Stellenzeiger und eine bestimmte Anzahl vorhergehender Glieder erhält. Denn ist z. B. die Gleichung gegeben $y_2 = f(x, y, y_1)$, so wird man daraus herleiten:

$$y_3 = f(x+h), y_1, y_2),$$
$$y_4 = f(x+2h), y_2, y_3) \text{ u. s. w.};$$

Hiernach wird man die Reihe

$$y, y_1, y_2, y_3, y_4 \ldots$$

bilden, in welcher die beiden ersten Glieder willkührlich sind.

§. 96. Wir schreiten nun zur endlichen Integration der allgemeinen Differenzengleichung vom ersten Grade und von der ersten Ordnung, nämlich von $\Delta y + Py = Q$, wo P und Q bloße Funktionen von x sind; der Kürze wegen wird der constante Zuwachs h der Veränderlichen x der Einheit gleich vorausgesetzt. Wir machen mit Lagrange $y = uz$, also:

$$\Delta y = u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z;$$

die gegebene Gleichung geht dadurch in folgende:

$$u\Delta z + z\Delta u + \Delta u\Delta z + Puz = Q$$

über, welche sich, da man über u nach Willkühr verfügen kann, in folgende zwei:

$$\Delta u + Pu = 0 \text{ und } \Delta z(u + \Delta u) = Q$$

zerlegen läßt. Die letzte gibt $z = \Sigma \frac{Q}{u + \Delta u}$.

Unsere Aufgabe läuft nun dahin aus, die Gleichung $\Delta u + Pu = 0$ oder $\frac{\Delta u}{u} = -P$ zu summiren. Setzt man deshalb $u = \varepsilon^t$, so bekommt man $\Delta u = \varepsilon^t(\varepsilon^{\Delta t} - 1)$ und $\frac{\Delta u}{u} = \varepsilon^{\Delta t} - 1 = -P$; hieraus entspringt $\Delta t = l(1-P)$ und $t = \Sigma l(1-P)$. Nun ist die Summe der Logarithmen der Funktion $1-P$ gleich dem Logarithm des Produktes der auf einander folgenden Werthe von $1-P$ zwischen den gegebenen Grenzen, d. h. von:

$$(1-P_{x-1})(1-P_{x-2} \ldots (1-P_0) \text{ (§. 85.)}$$

Bezeichnet man dieses Produkt durch $[1-P_{x-1}]x$, wo x die Anzahl der Factoren andeutet; so erhält man:

$$t=![1-P_{x-1}]_x \text{ und } u=[1-P_{x-1}]_x.$$

Da nun $u+\Delta u=u$ ist, so hat man auch:

$$u+\Delta u=[1-P_x]_{x+1} \text{ und } z=\Sigma\frac{Q}{[1-P_x]_{x+1}};$$

hiernach das endliche Integral:

$$y=[1-P_{x-1}]_x\,\Sigma\left(\frac{Q}{[1-P_x]_{x+1}}+C\right),$$

wo C die willkührliche Constante vorstellt.

Für die Gleichung $y_1=Rx+Q$, welche mit $y+\Delta y=Ry+Q$ gleichbedeutend ist, erhält man, wenn sie mit $\Delta y+Py=Q$ zusammengehalten wird, als endliches Integral:

$$y=[R_{x-1}]_x\left(\Sigma\frac{Q}{[R_x]_{x+1}}+C\right).$$

Im Fall, daß R constant ist, bekommt man:

$$y=R^x\left(\Sigma\frac{Q}{R^{x+1}}+C\right).$$

Ist überdies noch Q constant, so hat man:

$$y=R^x\left(\frac{Q}{R^x(1-R)}+C\right),$$

weil: $\Sigma\frac{Q}{R^{x+1}}=Q\,\Sigma R^{-x-1}=\frac{QR^{-x-1}}{R^{-1}-1}=\frac{Q}{R^x(1-R)}$ (§. 77.).

§. 97. Kennt man zwei besondere Werthe $y'x$ und $y''x$, welche der lineären Differenzengleichung von der zweiten Ordnung

$$y_{x+2}+Py_{x+1}+Qy_x=0 \quad (1)$$

genügen, so ist das vollständige endliche Integral dieser Gleichung:

$$y_x=C'y'_x+C''y''_x,$$

wo C' und C'' zwei willkührliche Constanten sind.

Denn dieser "zwei willkührliche Constanten" enthaltende Ausdruck thut der Gleichung (1) Genüge, wenn man ihn statt y_x einführt, indem die linke Seite derselben in zwei Theile zerfällt, wovon jeder für sich Null ist.

Hat man das endliche Integral der Gleichung (1) gefunden, so kann man auch das der Gleichung:

$$y_{x+2}+Py_{x+1}+Qy_x=V\ .\ .\ .\ (2)$$

finden, wo V ebenfalls, wie P und Q, eine Funktion von x ist, indem man das endliche Integral der Form noch beibehält, die Größen C′ und C″ aber nicht mehr als Constanten, sondern als unbekannte Funktionen von x betrachtet, die dergestalt zu bestimmen sind, daß man

$$y_x = C'_x\, y'_x + C''_x\, y''_x$$

als vollständiges endliches Integral der Gleichung (2) ansehen kann.

Unter dieser Voraussetzung führt der Ausdruck:

$$y_x = C'_x\, y'_x + C''_x\, y''_x$$

zunächst auf: $y_{x+1} = C'_{x+1}\, y'_{x+1} + C''_{x+1}\, y''_{x+1}$.

Derselbe geht in:

$$y_{x+1} = C'_x\, y'_{x+1} + C''_x\, y''_{x+1} + y'_{x+1}\,\Delta C'_x + y''_{x+1}\,\Delta C''_x$$

über, wenn man statt C'_{x+1} und C''_{x+1} deren Werthe:

$$C'_x + \Delta C'_x \text{ und } C''_x + \Delta C''_x$$

setzt und reducirt sich, wenn man:

$y'_{x+1}\Delta C'_x + y''_{x+1}\Delta C''_x = 0$ macht, auf:

$$y_{x+1} = C'_x\, y'_{x+1} + C''_x\, y''_{x+1}.$$

Läßt man in dieser Gleichung x sich abermals ändern, so erhält man:

$$y_{x+2} = C'_{x+1} y'_{x+2} + C''_{x+1} y''_{x+2}$$
$$= C'_x\, y'_{x+2} + C''_x\, y_{x+2} + y'_{x+2}\Delta C'_x + y''_{x+2}\Delta C''_x.$$

Führt man die Werthe von y_x, y_{x+1}, y_{x+2} in die Gleichung (2), so bleibt:

$$y'_{x+2}\Delta C'_x + y''_{x+2}\Delta C''_x = V.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit $y'_{x+1}\Delta C'_x + y''_{x+1}\Delta C''_x = 0$ dient zur Bestimmung der Differenzen $\Delta C'$ und $\Delta C''_x$. Die Ermittelung der Größen C'_x und C''_x ist hiernach auf die endliche Integration der Funktionen von einer Veränderlichen x zurückgeführt.

Anmerkung. Hat man eine Gleichung zwischen x, y, Δy und $\Delta^2 y$, so substituirt man $y_{x+1} - y_x$ statt Δy und $y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$ statt $\Delta^2 y$; dadurch geht die gegebene Gleichung in

$$y_{x+2} + P y_{x+1} + Q y_x = V$$

über, wenn sie linear gewesen ist.

§. 98. Was hier über die lineare Differenzengleichung von der zweiten Ordnung gesagt worden, hat Lagrange auf lineare Differenz-

gleichungen aller Ordnungen ausgedehnt. Um also erstens eine lineare Differenzengleichung von der nten Ordnung:

$$y_{x+n}+Py_{x+n-1}+Qy_{x+n-2}\ .\ .\ .\ +Uy_x=0\ .\ .\ .\ (A)$$

zu summiren, muß man zunächst n specielle Werthe y'_x, y''_x, y'''_x... aufsuchen, welche derselben genügen; das endliche Integral ist dann

$y_x = C'y'_x + C''y''_x + C'''y'''_x + \ .\ .\ .$, wo C', C'', C''' . . . willkührliche Constanten sind.

Zweitens wird das endliche Integral der Differenzengleichung:

$$y_{x+n}+Py_{x+n-1}+\ .\ .\ .\ +Uy_x=V\ .\ .\ .\ (B)$$

auf das der Gleichung (A) zurückgeführt, wofern in dem letztern die Constanten als Funktionen von x angesehen werden. Um diese Funktionen zu ermitteln, muß man die Differenzen

$$\Delta C'_x,\ \Delta C''_x,\ \Delta C'''_x\ .\ .\ .\ .$$

mit Hülfe der n folgenden Gleichungen:

$$y'_{x+1}\Delta C'_x + y''_{x+1}\Delta C''_x + y'''_{x+1}\Delta C'''_x + \text{ꝛc.}\ .\ .\ . = 0,$$
$$y'_{x+2}\Delta C'_x + y''_{x+2}\Delta C''_x + y''_{x+2}\Delta C'''_x + \text{ꝛc.}\ .\ .\ . = 0,$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$
$$y'_{x+n-1}\Delta C'_x + y''_{x+n-1}\Delta C''_x + y'''_{x+n-1}\Delta C'''_x + \text{ꝛc.}\ldots=0,$$

und $y'_{x+n}\Delta C'_x + y''_{xn}\Delta C''_x + y'''_{x+n}\Delta C'''_x + \text{ꝛc.} = V$

in Funktionen von x ausdrücken, und hierauf diese für $\Delta C'_x$, $\Delta C''_x$, $\Delta C'''_x$ . . . gefundenen expliciten Funktionen nach den Methoden des vorigen Kapitels summiren.

§. 99. Sind die Coefficienten der Gleichung (A) constant, so setze man $y_x = m^x$, wonach:

$$y_{x+1}=m^{x+1},\ y_{x+2}=m^{x+2},\ .\ .\ .\ y_{x+n}=m^{x+n} \text{ wird.}$$

Die Gleichung (A) geht dann in

$$m^n + Pm^{n-1}+Qm^{n-2}\ .\ .\ .\ +U=0\ .\ .\ .\ (C)$$

über. Bezeichnet man die verschiedenen Wurzeln dieser Gleichung durch m', m'', m''' . . . , so hat man als endliches Integral:

$$y_x = C'm'^x + C''m''^x + C'''m'''^x + \text{ꝛc.}$$

Anmerkung. Die Differenzengleichung (A) drückt die Natur einer Reihe aus, d. h. zeigt an, wie jedes Glied von den n nächst vorhergehender Glieder abhängig ist; die n ersten Glieder dieser Reihe sind demnach willkührlich. Sieht man die-

selben als bekannt an und bezeichnet sie durch y_0, y_1, y_2, y_3 . . . y_{n-1}; so kann man folgende Gleichungen aufstellen:

$$y_0 = C' + C'' + C''' + \text{etc.},$$
$$y_1 = C'm' + C''m'' + C'''m''' + \text{etc.},$$
$$y_2 = C'm'^2 + C''m''^2 + C'''m'''^2 + \text{etc.},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$y_{n-1} = C'm'^{n-1} + C''m''^{n-1} + C'''m'''^{n-1} + \text{etc.}$$

aus denen die n Constanten C', C'', C''' . . . . bestimmt werden können.

§ 100. Hat die Gleichung (C) imaginäre Wurzeln, so liefert ein zusammen gehöriges Paar dergleichen Wurzeln von der Form:

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

zu dem allgemeinen Ausdruck von y_x den Theil:

$$C'(\alpha + \beta\sqrt{-1})^x + C''(\alpha - \beta\sqrt{-1})^x,$$

welchen man leicht nach „Note VII" der „höhern Algebra" in:

$$C'\varrho^x(\cos\varphi x + \sqrt{-1}\sin\varphi x) + C''\varrho^x(\cos\varphi x - \sqrt{-1}\sin\varphi x)$$
$$= \varrho^x(E'\cos\varphi x + E''\sin\varphi x)$$ umwandelt, wenn man:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \varrho^2, \quad \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}} = \cos\varphi, \quad \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}} = \sin\varphi$$ macht und
$$C' + C'' = E', \quad (C' - C'')\sqrt{-1} = E''$$ annimmt.

§. 101. Sind in der Gleichung (C) zwei Wurzeln m', m'' einander gleich, so reduciren sich die beiden Ausdrücke $C'm'^x + C''m''^x$ auf $(C' + C'')m'^x$, wo der Coefficient $C' + C''$ nur als eine Constante gilt. In solchem Falle verliert demnach der Werth y_x an Allgemeinheit; um diesem Mißstande abzuhelfen, setzen wir mit d'Alembert anfänglich $m'' = m' + h$. Dadurch verwandelt sich:

$$C'm'^x + C''m''^x \text{ in}$$
$$C'm'^x + C''\left(m'^x + hxm'^{x-1} + \frac{h^2x^2}{1\cdot 2}m'^{x-2} + \text{etc.}\right),$$

was, wenn $C' + C'' = E'$ und $C''h = E''$ gesetzt wird, in:

$$E'm'^x + E''xm'^{x-1} + \frac{E''hx^2}{2}m'^{x-2} \text{ etc. übergeht.}$$

Da nun der Ausdruck $C'm'^x + C''m''^x$ der vorgelegten Differenzengleichung Genüge thut, ganz unabhängig von jedem Werthe der

Coefficienten C' und C''; so wird solches auch mit der obigen Entwickelung und den Constanten E' und E'' der Fall, wie klein man auch h wählen mag. Macht man folglich $h=0$, so wird der Ausdruck:

$$E'm'^x + E''xm'^{x-1},$$

welcher zwei willkührliche Constanten enthält, der gegebenen Differenzengleichung genügen.

Sind drei Wurzeln m', m'', m''' einander gleich, so macht man vorerst blos $m'=m''$ und setzt $m'''=m'+h$.

Hierdurch geht der Ausdruck:

$$C'm'^x + C''m''^x + C'''m'''^x \text{ in}$$
$$E'm'^x + E''m'^{x-1} + C'''(m'+h)^x \text{ über.}$$

Indem man entwickelt, kommt:

$$E'm'^x + E''m'^{x-1} + C'''m'^x + C'''xm'^{x-1}h$$
$$+ \frac{C'''h^2}{1\cdot 2} m'^{x-2}x(x-1) + \frac{C'''h^3}{1\cdot 2\cdot 3} m'^{x-3}x(x-1)(x-2) + \text{ꝛc.},$$

was, wenn $E'+C'''=F'$, $E''+C'''h=F''$, $C''h^2=F'''$ gesetzt wird, in

$$F'm'^x + F''xm'^{x-1} + \frac{F'''x(x-1)}{1\cdot 2} m'^{x-2} + \frac{F'''x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3} m'^{x-3}h + \text{ꝛc.}$$

übergeht. Dieser Ausdruck wird der gegebenen Differenzengleichung genügen, ganz abgesehen von den Constanten F', F'', F''' und wie klein auch h sein mag. Macht man daher $h=0$, so wird für den Fall, daß $m'=m''=m'''$ ist, an die Stelle des Theils

$$C'm'^x + C''m''^x + C'''m'''^x$$

des endlichen Integrals der Ausdruck:

$$F'm'^x + F''xm'^{x-1} + F''' \frac{x(x-1)}{1\cdot 2} m'^{x-2}$$

treten. Dieses Verfahren kann man so auf jede beliebige Anzahl gleicher Wurzeln weiter fortsetzen.

§. 102. Es ist noch wenig geschehen, um das endliche Integral der Differenzengleichung (A) zu finden, wenn P, Q . . . . Funktionen von x darstellen. Leicht läßt sich jedoch dies für die Differenzengleichung:

$$y_x = A[X_x]_1 y_{x-1} + B[X_x]_2 y_{x-2} + \ldots L[X_x]_n y_{x-n}$$

bewerkstelligen, wo A, B, . . . L constant sind, X eine beliebige

Funktion von x bedeutet, und $[X_x]_k$ mit $X_x X_{x-1} X_{x-2} \ldots X_{x-k+1}$ gleichlautend ist.

Man braucht nämlich, nur $y_x = a^x [X_x]_x$ zu setzen, wonach:

$y_{x-1} = a^{x-1}[X_{x-1}]_{x-1}$, $y_{x-2} = a^{x-2}[X_{x-2}]_{x-2} \ldots$

$y_{x-n} = a^{x-n}[X_{x-n}]_{x-n}$ wird.

Durch Substitution dieser Werthe in die vorgelegte Differenzengleichung verschwindet die Funktion X und es bleibt übrig:

$$a^n - Aa^{n-1} - Ba^{n-2} \ldots - L = 0.$$

Stellt man die Wurzeln dieser Gleichung durch a', a'', $a''' \ldots$ dar, so wird das vollständige endliche Integral unserer Gleichung sein:

$$y_x = [X_x]_x (C'a'^x + C''a''^x + \text{2c.}),$$

wo C', $C'' \ldots$ willkührliche Constanten bedeuten.

Kommen in der Gleichung in a imaginäre oder gleiche Wurzeln vor, so wird man auf eine analoge Weise wie in den beiden vorhergehenden Paragraphen verfahren, um das in Frage stehende allgemeine Integral zu erhalten.

Um ein Beispiel zu geben, wollen wir das endliche Integral der Gleichung:

$$y_x = 2[x]_1 y_{x-1} + 3[x]_2 y_{x-2} \text{ oder:}$$

$$y_x = 2xy_{x-1} + 3x(x-1)y_{x-2}$$

suchen, welche, wenn $y_0 = 1$ und $y_1 = 4$ gesetzt wird, die Reihe 1, 4, 22, 204, 2424 2c. erzeugt. Die Gleichung $a^2 - 2a - 3 = 0$ liefert uns die Wurzeln $a' = 3$, $a'' = -1$; hiernach entsteht das endliche Integral:

$$y_x = [x]_x [C'3^x + C''(-1)^x].$$

Um die Constanten C' und C'' vermittelst der Werthe $y_0 = 1$ und $y_1 = 4$ zu bestimmen, bemerken wir zunächst, daß allgemein:

$$[x]_n = [x]_m [x-m]_{n-m} \text{ ist.}$$

Hieraus entspringt für $m = 0$ der Ausdruck $[x]0 = 1$.

Wir haben nun die beiden Gleichungen:

$$1 = C' + C'' \text{ und } 4 = 3C' - C'', \text{ welche}$$

$$C' = \tfrac{5}{4} \text{ und } C'' = -\tfrac{1}{4} \text{ geben.}$$

Vermittelst dieser Werthe wird unser endliches Integral

$$y_x = [x]_x [\tfrac{5}{4} \cdot 3^x - \tfrac{1}{4}(-1)^x].$$

Nimmt man z. B. $x = 4$, so erhält man daraus, wie oben:

$$y_4 = 2424.$$

Ueber die Natur der durch die endliche Integration eingehenden Constanten.

§. 103. Die willkührlichen Größen, welche die Integration der Differentialgleichungen zwischen zwei Veränderlichen mit sich führt, sind jederzeit absolut constant. Nicht so verhält es sich, wie schon bemerkt, mit den willkührlichen Größen bei den endlichen Integralen der Differenzengleichungen; denn diese Größen können hier nicht blos als absolute, sondern auch als periodische Constanten erscheinen, weil sie nur der Bedingung unterworfen sind, daß sie den nämlichen Werth beibehalten, wenn x in $x+h$ übergeht. Die Differenzengleichung $\Delta y=0$ z. B. genügt daher nicht allein $y=$ Constant, sondern außerdem $y=\varphi\left(\sin\frac{2\pi x}{h}, \cos\frac{2\pi x}{h}\right)$, wo φ eine ganz beliebige Funktion bedeutet.

Aehnliches gilt für jede andere Differenzengleichung der ersten Ordnung, so daß in dem endlichen Integral einer solchen Gleichung (§. 96) statt C der Ausdruck $\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$ zu setzen ist, wenn $h=1$ angenommen wird.

§. 104. Die willkührlichen Funktionen, welche die endlichen Integrale der Differenzengleichungen vervollständigen, lassen sich nicht wie die absoluten Constanten dadurch bestimmen, daß man die Integrale der Bedingung unterwirft, einer bestimmten Anzahl gegebener Werthe Genüge zu thun. Hat man nämlich z. B. die Gleichung:

$$y_x = X\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x),$$

aus welcher für $x=0$, $x=1$, $x=2$ .....
der entsprechenden Werthe $y=a$, $y=a'$, $y=a''$, ...
gezogen werden sollen; so kann man im Allgemeinen nur die erste dieser Bedingungen erfüllen. Denn ist einmal dem Ausdrucke $\varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)$ ein bestimmter Werth beigelegt worden, aus welchem $y_0=a$ hervorgeht; so müssen, weil dieser Werth für $x=1$, $x=2$, ... unverändert bleibt, die entsprechenden Werthe von y_x nothwendigerweise bestimmt sein: die gegebenen Größen a', a'' .... können folglich nur dazwischen liegenden Stellenzeigern angehören.

Ist daher durch Integration einer Differenzengleichung, z. B. der ersten Ordnung, eine derartige periodische Constante C_x eingegangen, so

wird sie nur daraus bestimmt sein, daß der Ausdruck y_x in dem Intervall von $x=0$ bis $x=1$ dieselben Werthe, wie eine gegebene Gleichung $y=f(x)$ liefert. In der That soll man den Werth von y_x finden, welcher einem Stellenzeiger angehört, der aus einer beliebigen ganzen Zahl m und einem Bruche n besteht; so berechnet man den Werth y_n vermittelst der Relation $y=f(x)$, und vergleicht das Resultat mit demjenigen, welches die Gleichung

$$y_n = X_n \varphi(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n) \text{ liefert.}$$

Hieraus ergibt sich der Werth von $\varphi(\sin 2\pi n, \cos 2\pi n)$, welcher mit dem von $\varphi[\sin 2\pi(m+n), \cos 2\pi(m+n)]$ übereinstimmen muß. Es ist demnach der Werth von

$$y_{m+n} = X_{m+n}[\sin 2\pi(m+n), \cos 2\pi(m+n)]$$

völlig bestimmt. — Die gegebene Funktion $f(x)$ braucht nicht gerade eine continuirliche zu sein, wenn man nur für alle Werthe von x zwischen 0 und 1 sämmtliche entsprechende Werthe von y kennt, mögen letztere nun in jenem Intervall ein einziges oder verschiedene Gesetze befolgen.

Anmerkung. Das eben Gesagte läßt sich auch auf folgende Weise deutlich machen. Löst man die gegebene Differenzengleichung auf, dergestalt daß sie die Form

$$y_{x+1} = f(x, y_x) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

annimmt; so entspringt daraus:

$$y_{x+2} = f(x+1, y_{x+1}) \quad . \; . \; . \quad (2),$$

$$y_{x+3} = f(x+2, y_{x+2}) \quad . \; . \; . \quad (3), \text{ u. s. w.}$$

Kennt man nun für jeden zwischen 0 und 1 liegenden Werth x' den zugehörigen Werth $y_{x'}$; so liefert die Gleichung (1) den Werth von $y_{x'+1}$, d. h. alle Werthe, welche den Werthen von x zwischen 1 und 2 angehören. Ebenso gibt die Gleichung (2) alle Werthe von y, welche den Werthen von x zwischen 2 und 3 entsprechen; die Gleichung (3) alle Werthe von y, die den zwischen 3 und 4 liegenden Werthen von x zukommen; u. s. w.

§. 105. Die geometrischen Betrachtungen werden die eben auseinander gesetzte Theorie bedeutend aufklären. Um die durch die einfache Gleichung $\Delta y=0$ dargebotenen Umstände durch den Lauf

einer Linie darzustellen, sei in einer beliebigen Entfernung von der Abscissenachse OX (Fig. 10) die Linie AZ zu derselben parallel gezogen und in Theile AA′, A′A″, A″A‴ . . . , welche gleich h sind, getheilt: sämmtliche Curven, wie

ABA′B′A″B″A‴, ACA′C′A″C″A‴, ADA′D′A″D″A‴, . . .

welche durch die Punkte A, A′, A″, A‴ . . . gehen und zwischen diesen Punkten aus gleichen und ähnlichen Theilen zusammengesetzt sind, werden der Gleichung $\Delta y = 0$ Genüge thun. Für die Punkte A′, A″, A‴ . . . ist dies sofort einleuchtend; ferner sieht man, daß, wenn $AP = x$, $A'P' = x + h$ genommen wird, die Ordinaten LP und L′P′, MP und M′P′, NP und N′P′ u. s. w. beziehungsweise einander gleich sein werden, weil die Bogen AL und A′L′, AM und A′M′, AN und A′N′ 2c. gleich und ähnlich sind: für jede Curve besteht daher die Gleichung $\Delta y = 0$. — Die Aufeinanderfolge von gleichen und ähnlichen Bogen, wie GH, G′H′, G″H″ u. s. w., welche auf eine discontinuirliche Weise vereinigt sind, gibt ebenfalls $\Delta y = 0$.

§. 106. Wir schreiten jetzt zur Construktion der allgemeinen Differenzengleichung von der ersten Ordnung $\Delta y = F(x, y)$. Ist der erste Punkt B (Fig. 11) der gesuchten Curve willführlich gewählt oder nach den Bedingungen der Aufgabe bestimmt; so wird, weil die gegebene Gleichung blos die Ordinate $A'B' = y$, liefert und nichts über die dem Absciſſenstücke $AA' = h$ angehörigen Curvenpunkte aussagt, durch die Punkte B und B′ eine beliebige Curve gelegt werden können. Ist dies geschehen, so lassen sich leicht alle dem Absciſſenstücke A′A″ entsprechenden Punkte des Bogens B′B″ finden: man nehme zu diesem Behufe von einem beliebigen Punkte P′ des Absciſſenstückes an rückwärts eine Distanz $P'P = A'A = h$, errichte die Ordinate PM und ziehe MD′ parallel mit PP′; der aus der Gleichung $\Delta y = F(x, y)$ für die Absciſſe AP entnommene Werth von Δy wird die Gerade D′M′ darstellen, welche zu $P'D' = PM$ hinzugefügt den Curvenpunkt M′ kennen lehrt. Wird der construirte Bogen B′B″ hierauf wie der Bogen BB′ benutzt, so wird man alle Punkte des Bogens B″B‴ erhalten, u. s. w.

Anmerkung. Es ist klar, daß nichts hindert, sich derselben Methode zu bedienen, um die Curve rückwärts vom Punkte A weiter fortzusetzen.

Vom Summiren der Funktionen von zwei Veränderlichen.

§. 107. Wir wollen jetzt die Summe der einfachsten Funktionen zweier veränderlichen Größen x und y aufsuchen.

1. Es ist $\triangle(x+y)=\triangle x+\triangle y=h+k$, wenn man die constanten Größen $\triangle x$, $\triangle y$ durch h und k darstellt. Durch Summiren ergibt sich:

$$x+y=\Sigma(h+k)=(h+k)\Sigma 1, \text{ woraus } \Sigma 1=\frac{x+y}{h+k}+C,$$

wo C eine unbestimmte, unveränderliche Größe bedeutet.

2. Man hat $\triangle(x^2+y)=2xh+h^2+k$, mithin:

$x^2+y=2h\Sigma x+h^2\Sigma 1+k\Sigma 1+C$. Daraus entspringt:

$$\Sigma x=\frac{x^2+y-(h^2+k)\Sigma 1}{2h}+C.$$

Ebenso ist: $\Sigma y=\dfrac{x+y^2-(h+k^2)\Sigma 1}{2k}+C.$

3. Aus $\triangle(x^3+y)=3x^2h+3xh^2+h^3+k$ folgt:

$$\Sigma x^2=\frac{x^3+y-3h^2\Sigma x-(h^3+k)\Sigma 1}{3h}+C.$$

Eben so ist $\Sigma y^2=\dfrac{x+y^3-3k^2\Sigma y-(h+k^3)\Sigma 1}{3k}+C.$

4. Legt man die Differenz

$$\triangle(x^2y)=2xyh+yh^2+x^2k+2xhk+h^2k$$

zum Grunde, so kommt:

$$x^2y=2h\Sigma xy+h^2\Sigma y+k\Sigma x^2+2hk\Sigma x+h^2k\Sigma 1;$$

daraus erhält man:

$$\Sigma xy=\frac{x^2y-k\Sigma x^2-2hk\Sigma x-h^2\Sigma y-h^2k\Sigma}{2h}+C.$$

Auf demselben Wege lassen sich die Summen für x^3, y^3, x^2y, xy^2, x^2y^2 u. s. w., finden.

§. 108. Durch das wiederholte Summiren der Summen von niedrigerer Ordnung entstehen die höheren Summen. Dabei kann man von partiellen Summen nach x, von partiellen Summen nach y, und von Summen, welche nach x und nach y zugleich zu nehmen sind, reden. Analog mit den partiellen Differenzen, soll die partielle

Summe von z nach x mit $\sum\limits_{x} z$, jene nach y mit $\sum\limits_{y} z$, die zweite nach x und y mit $\sum\limits_{x,y}^2 z$ u. s. w. bezeichnet werden.

1. Es ist $\underset{x,y}{\Delta}^2(xy) = hk$. Nimmt man auf beiden Seiten die Summen nach x, so hat man:

$$kh\sum_{x} 1 = \underset{y}{\Delta}(xy) + \varphi y),$$

insofern man erwägt, daß in den partiellen Summen nach x die willkührliche Constante eine unbestimmte Funktion von y sein kann, indem die letztere bei der Bildung der partiellen Differenz nach x gerade so wie die absolute Constante verschwindet. Summirt man hierauf das vorhergehende Resultat in Bezug auf y, so ergibt sich:

$$hk\sum_{x,y}^2 1 = xy + \varphi y + \psi x,$$

wo ψx eine unbestimmte Funktion von x bedeutet.

Hiernach hat man $\dfrac{\Sigma^2 1}{x,y} = \dfrac{xy}{hk} + \varphi y + \psi x$,

wenn man die Funktionen $\dfrac{\varphi y}{hk}$ und $\dfrac{\psi x}{hk}$ durch φy und ψx ersetzt, was wegen der Unbestimmtheit der durch φ und ψ dargestellten Funktionen und wegen der Beständigkeit von h und k erlaubt ist.

2. Es ist: $\underset{x,y}{\Delta}^2(x^2 y) = 2xhk + kh^2$; mithin:

$$x^2 y = \sum_{x,y}^2 (2hkx + kh^2) = 2hk\sum_{x,y}^2 x + kh^2 \sum_{x,y}^2 1 + \varphi x + \psi y;$$

Daraus folgt: $\sum\limits_{x,y}^2 x = \dfrac{x^2 y}{2hk} - \dfrac{h}{2} \sum\limits_{x,y}^2 1 + \varphi x + \psi y.$

3. Es ist: $\underset{x,y}{\Delta}^2(x^3 y) = 3hkx^2 + 3h^2 kx + h^3 k$; folglich umgekehrt:

$$\sum_{x,y}^2 x^2 = \frac{x^3 y}{3hk} - h\sum_{x,y}^2 x - \frac{h^2}{3} \sum_{x,y}^2 1 + \varphi x + \psi y.$$

4. Man hat: $\underset{x,y}{\Delta}^2(x^2 y^2) = 4hkxy + 2hk^2 x + 2h^2 ky + h^2 k^2$;

hieraus ergibt sich:

$$\sum_{x,y}^2 (xy) = \frac{x^2 y^2}{4hk} - \frac{k}{2} \sum_{x,y}^2 x - \frac{h}{2} \sum_{x,y}^2 y - \frac{hk}{4} \sum_{x,y}^2 1 + \varphi x + \psi y.$$

§. 109. Um auch etwas über die Summation der endlichen Differenzengleichungen mit drei Veränderlichen zu sagen, betrachten wir die Gleichung:

$$Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} = 0,$$

welche nur ein specieller Fall der allgemeinern Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} Az_{x,y} + Bz_{x+1,y} + Cz_{x+2,y} \\ \quad + B'z_{x,y+1} + C'z_{x+1,y+1} + \text{ꝛc.} \\ \quad\quad + C''z_{x,y+2} \end{array}\right\} = 0 \text{ ist},$$

in welcher die Coefficienten A, B, B', C, C' . . . . constante Größen sind.

Machen wir $z = a\alpha^x \beta^y$, wo a, α und β unbestimmte Constanten bedeuten; so haben wir:

$$z_{x+1,y} = a\alpha^{x+1}\beta^y,\ z_{x,y+1} = a\alpha^x\beta^{y+1},\ z_{x+1,y+1} = a\alpha^{x+1}\beta^{y+1}.$$

Mittelst dieser Werthe verwandelt sich unsere erstere Gleichung in:

$$A + B\alpha + B'\beta + C'\alpha\beta = 0,$$

woraus:
$$\beta = -\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha};\ \text{so daß}$$

$$z_{x,y} = a\alpha^x\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^y \text{ wird},$$

in welchem Ausdrucke die Größen a und α ganz willkührlich bleiben. Entwickelt man $\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^y$ in eine nach den Potenzen von α fallende Reihe und bemerkt, daß solche die Form:

$$Y\alpha^y + Y'\alpha^{y-1} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots, \text{ wenn } C' = 0,$$
$$Y \ + Y'\alpha \ + \text{ꝛc.} \ldots\ldots, \text{ wenn } A = 0 \text{ oder } B' = 0,$$
$$Y\alpha^{-y} + Y'\alpha^{-y-1} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots, \text{ wenn } B = 0,$$

annimmt; so wird man im Allgemeinen setzen:

$$\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^y = Y\alpha^{uy} + Y'\alpha^{uy-1} + Y''\alpha^{uy-2} + \text{ꝛc.}$$

wo $u = 1$ oder 0 oder -1 sein kann, und die Coefficienten Y, Y', Y''... außer den Größen A, B, B', C' noch die Veränderliche y enthalten. Unser Ausdruck von $z_{x,y}$ bekommt hiernach die Form:

$$z_{x,y} = Ya\alpha^{x+uy} + Y'a\alpha^{x+uy-1} + Y''a\alpha^{x+uy-2} + \text{ꝛc.}$$

Indem man die Constanten a und α nach und nach in b und β, in c und γ umändert, hat man auch:

$$z_{x,y} = Yb\beta^{x+uy} + Y'b\beta^{x+uy-1} + Y''b\beta^{x+uy-2} + \text{ꝛc.},$$
$$z_{x,y} = Yc\gamma^{x+uy} + Y'c\gamma^{x+uy-1} + Y''c\gamma^{x+uy-2} + \text{ꝛc., u. s. w.}$$

Da von diesen verschiedenen Werthen jeder für sich der vorgelegten Gleichung Genüge thut, so wird solches auch mit ihrer Summe der Fall sein; man kann daher setzen:

$$\begin{aligned} z_{x,y} = & \; Y(a\alpha^{x+uy} + b\beta^{x+uy} + c\gamma^{x+uy} + \text{etc.}) \\ & + Y'(a\alpha^{x+uy-1} + b\beta^{x+uy-1} + c\gamma^{x+uy-1} + \text{etc.}) \\ & + Y''(a\alpha^{x+uy-2} + b\beta^{x+uy-2} + c\gamma^{x+uy-2} + \text{etc.}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Jede einzelne Linie dieses Ausdrucks, in der eine unbestimmte Anzahl von willkührlichen Constanten vorkommt, kann durch eine willkührliche Funktion des veränderlichen Exponenten, mit welchem ihre verschiedenen Glieder behaftet sind, vertreten werden; man erhält dergestalt:

$$z_{x,y} = Y\varphi(x+uy) + Y'\varphi(x+uy-1) + Y''\varphi(x+uy-2) + \text{etc.},$$

wo φ jene willkührliche Funktion bedeutet.

Um einzusehen, daß eine willkührliche Funktion an die Stelle der Reihen:

$$\begin{aligned} & a\alpha^{x+uy} + b\beta^{x+uy} + c\gamma^{x+uy} + \ldots, \\ & a\alpha^{x+uy-1} + b\beta^{x+uy-1} + c\gamma^{x+uy-1} + \ldots, \\ & a\alpha^{x+uy-2} + b\beta^{x+uy-2} + c\gamma^{x+uy-2} + \ldots, \end{aligned}$$

gesetzt werden kann, ist es hinreichend, zu bemerken, daß der Ausdruck von $z_{x,y}$ der vorgelegten Gleichung, unabhängig von jedem besondern Werthe der Größen α, β, γ .... nur insofern Genüge thut, als die Glieder, in welchen diese Größen mit denselben Exponenten behaftet sind, nach der Substitution der Werthe von $z_{x,y-1}$, $z_{x+1,y}$, $z_{x+1,y+1}$, sich in Folge der Form der Coefficienten Y, Y', Y'' u. s. w. gegenseitig aufheben. Es ist aber einleuchtend, daß die Funktion φ jene Bedingung ebenfalls erfüllt, indem die Glieder, welche in dem ersten Fall mit dem nämlichen Exponenten versehen sind, in dem zweiten mit derselben Funktion multiplicirt werden, sich mithin auch hier, unabhängig von der Form dieser Funktion, gegenseitig tilgen. Für $y=0$ erhält man zuvörderst:

$$z_{x,0} = Y\varphi(x) + Y'\varphi(x-1) + \text{etc.},$$

was, weil in diesem Fall $Y=1$, $Y'=0$, $Y''=0$ u. s. w., sich auf $z_{x,0}=\varphi(x)$ reducirt.

Es ist folglich $\varphi(x)$ nichts anders als der Werth von $z_{x,y}$, wenn man darin $y=0$ macht; es ist daher allgemein $\varphi(x+uy)=z_{x+uy,0}$. Hiernach hat man:

$$z_{x,y}=Yz_{x+uy,0}+Y'z_{x+uy-1,0}+Y''z_{x+uy-2,0}+ \text{ꝛc.},$$

wo die Größen: $z_{x+uy,0}$, $z_{x+uy-1,0}\ldots$

nichts anderes als die von dem Stellenzeiger $x+uy$ aus nach dem Stellenzeiger 0 gehenden Glieder in der ersten Linie der Tafel mit doppeltem Eingang, welche der vorgelegten Gleichung entspricht, sind.

§. 110. Nehmen wir als Beispiel die Reihe:

1,	1,	1,	1,	1,	1	. . . .
0,	1,	2,	3,	4,	5	. . . .
0,	0,	1,	3,	6,	10	. . . .
0,	0,	0,	1,	4,	10	. . . .
0,	0,	0,	0,	1,	5	. . . .
0,	0,	0,	0,	0,	1	. . . .

u. s. w.,

in der jedes Glied dadurch erhalten wird, daß man das Glied, welches dem gesuchten in derselben Linie unmittelbar vorhergeht, um das Glied, welches dem gedachten erstern in der Columne voransteht, vermehrt; eine Eigenschaft, welche durch die Gleichung:

$$z_{x+1,y+1}=z_{x,y+1}+z_{x,y}$$

ausgedrückt wird. Durch die Zusammenstellung dieser Gleichung mit der im vorhergehenden Paragraphen haben wir:

$C'=1$, $B'=-1$, $B=0$, $A=1$, wonach die Größe:

$-\left(\dfrac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^{-y}$ in $\dfrac{1}{(\alpha-1)^y}$ übergeht und die Reihe:

$$\alpha^{-y}+\frac{y}{1}\alpha^{-y-1}+\frac{y(y+1)}{1\cdot 2}\alpha^{-y-2}+ \text{ꝛc. liefert.}$$

Es ist also hier $n=-1$, $Y=1$, $Y'=\dfrac{y}{1}$, $Y''=\dfrac{y(y+1)}{1\cdot 2}$ + ꝛc.,

wodurch die allgemeine Formel sich in:

$$z_{x,y}=z_{x-y,0}+\frac{y}{1}z_{x-y-1,0}+\frac{y(y+1)}{1\cdot 2}z_{x-y-2,0}+ \text{ꝛc.},$$

verwandelt. Erwägt man, daß alle Glieder der ersten Columne,

mit Ausnahme des ersten, Null sind, daß ferner sämmtliche Glieder der ersten Linie Eins betragen; so hat man:

$$z_{x,y}=1+\frac{y}{1}+\frac{y(y+1)}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{y(y+1)\ldots(x-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots(x-y)},$$

oder, wenn das zweite Glied der Gleichung summirt wird:

$$z_{x,y}=\frac{y(y+1)(y+2)\ldots\ldots x}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots(x-y+1)}.$$

§. 111. Betrachten wir jetzt die Gleichung:

$$z_{x,y}=A_x\,z_{x-1,y}+A'_x\,z_{x-2,y}+A''_x\,z_{x-3,y}+ \text{etc.}$$
$$+B_x\,z_{x,y-1}+B'_x\,z_{x-1,y-1}+B''_x\,z_{x-2,y-1}+\text{etc.},$$

welche nur von der ersten Ordnung in Bezug auf y ist. Wir beginnen deshalb mit der speciellen Gleichung:

$$z_{x,y}=A_x\,z_{x-1,y}+B_x\,z_{x,y-1}+C_x,$$

wo vorausgesetzt wird, daß x und y die Einheit übertreffen.

Machen wir nach und nach $x=2$, $x=3$; so kommt:

$$z_{2,y}=A_2 z_{1,y}+B_2 z_{2,y-1}+C_2\ \ldots\ (1),$$
$$z_{3,y}=A_3 z_{2,y}+B_3 z_{3,y-1}+C_3\ \ldots\ (2).$$

Die letztere liefert, wenn y mit $y-1$ vertauscht wird:

$$z_{3,y-1}=A_3 z_{2,y-1}+B_3 z_{3,y-2}+C_3\ \ldots\ (3).$$

Eliminiren wir nun aus diesen drei Gleichungen die Größen $z_{2,y}$ und $z_{2,y-1}$, so haben wir:

$$z_{3,y}-(B_2+B_3)z_{3,y-1}+B_2B_3z_{3,y-2}$$
$$-A_3C_2-(1-B_2)C_3-A_2A_3z_{1,y}=0\ldots\ (\mathrm{I})$$

Diese Gleichung läßt sich, wenn die offenbar willkührliche Funktion z_1, y durch φy dargestellt wird, wie eine nur eine einzige Veränderliche y enthaltende Gleichung behandeln, da die Anzeiger in Bezug auf x in sämmtlichen Gliedern die nämlichen sind.

Macht man $x=4$, so gibt die vorgelegte Gleichung:

$$z_{4,y}=A_4z_{3,y}+B_4z_{4,y-1}+C_4\ \ldots\ (4),$$

woraus, wenn man y successive um 1 und 2 vermindert; entspringt:

$$z_{4,y-1}=A_4z_{3,y-1}+B_4z_{4,y-2}+C_4\ \ldots\ (5),$$
$$z_{4,y-2}=A_4z_{3,y-2}+B_4z_{4,y-3}+C_4\ \ldots\ (6).$$

Durch Verbindung der drei letzten Gleichungen mit der Gleichung (I) kann man die Größen $z_{3,y}$, $z_{3,y-1}$, $z_{3,y-2}$ eliminiren, und ein Resultat erhalten, in welchem blos $z_{4,y}$, $z_{4,y-1}$, $z_{4,y-2}$, $z_{4,y-3}$ und die willkührliche Funktion $z_{1,y}$ vorkommen. Dieses Resultat ist, wenn der Kürze halber,

$$A_3C_2+(1-B_2)\,C_3+A_2A_3z_{1,y}=D_3 \text{ gesetzt wird:}$$

$$z_{4,y}-(B_2+B_3+B_4)z_{4,y-1}+(B_2B_3+B_2B_4+B_3B_4)z_{4,y-2}$$
$$-B_2B_3B_4z_{4,y-3}-A_4D_3-C_4(1-B_2-B_3+B_2B_3)=0\;\ldots\;(\text{II}).$$

Macht man noch $x=5$, so gibt die vorgelegte Gleichung:

$$z_{5,y}=A_5z_{4,y}+B_5z_{5,y-1}+C_5\;\ldots\;(7).$$

Daraus entsteht, wenn man successive y um 1, 2 und 3 vermindert:

$$z_{5,y-1}=A_5z_{4,y-1}+B_5z_{5,y-2}+C_5\;\ldots\;(8),$$
$$z_{5,y-2}=A_5z_{4,y-2}+B_5z_{5,y-3}+C_5\;\ldots\;(9),$$
$$z_{5,y-3}=A_5z_{4,y-3}+B_5z_{5,y-4}+C_5\;\ldots\;(10).$$

Mit Hülfe dieser vier Gleichungen lassen sich die Größen $z_{4,y}$, $z_{4,y-1}$, $z_{4,y-2}$, $z_{4,y-3}$ aus der Gleichung (II) eliminiren; man erhält auf diese Art das Resultat:

$$\left.\begin{aligned}&z_{5,y}-(B_2+B_3+B_4+B_5)z_{5,y-1}\\&\quad+(B_2B_3+B_2B_4+B_2B_5+B_3B_4+B_3B_5+B_4B_5)\,z_{5,y-2}\\&\quad-(B_2B_3B_4+B_2B_3B_5+B_2B_4B_5+B_3B_4B_5)\,z_{5,y-3}\\&\quad+B_2B_3B_4B_5\,z_{5,y-4}-A_5D_4\\&\quad-C_5(1-B_2-B_3-B_4+B_2B_3+B_2B_4+B_3B_4-B_2B_3B_4)\end{aligned}\right\}=0\ldots(\text{III}),$$

wo $D_4=A_4D_3+C_4(1-B_2-B_3+B_2B_3)$ gesetzt worden.

Indem man diese Operationen weiter fortsetzt, erhält man ein Resultat von der Form:

$$z_{x,y}-M_x\,z_{x,y-1}+N_x\,z_{x,y-2}-P_x\,z_{x,y-3}\ldots\pm T_x\,z_{x,y-x+1}-D_x\ldots=0(x),$$

in welchem die Coefficienten M_x, N_x, P_x . . . D_x genau nach der Vorschrift gebildet werden, in Folge deren die hier oben stehenden berechnet sind. Man kann jene Coefficienten gegenseitig von einander auch dadurch herleiten, daß man zwischen der Gleichung:

$$z_{x-1,y}-M_{x-1}z_{x-1,y-1}+N_{x-1}z_{x-1,y-2}+\ldots-D_{x-1}=0\;\ldots\;(x-1),$$

und den folgenden $(x-1)$ Gleichungen, nämlich:

$$z_{x,y} = A_x z_{x-1,y} + B_x z_{x,y-1} + C_x,$$
$$z_{x,y-1} = A_x z_{x-1,y-1} + B_x z_{x,y-2} + C_x,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

die Größen $z_{x-1,y}$, $z_{x-1,y-1}$, $y_{x-1,y-2}$, u. s. w. eliminirt und das Resultat der Elimination mit der Gleichung (x) zusammenstellt. Man erhält auf solche Weise nachstehende Differenzengleichungen von der ersten Ordnung mit der bloßen Veränderlichen x:

$$M_x = M_{x-1} + B_x,$$
$$N_x = N_{x-1} + B_x M_{x-1},$$
$$P_x = P_{x-1} + B_x N_{x-1},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$D_x = A_x D_{x-1} + C_x (1 - M_{x-1} + N_{x-1} - \text{ic.}).$$

Der aus der Gleichung (x) hergeleitete Werth von $z_{x,y}$ wird x willkührliche Constanten enthalten. Da jedoch die vorgelegte Gleichung von der ersten Ordnung in Bezug auf y ist, so kann in dem endlichen Integral nur die für $z_{1,y}$ eingeführte willkührliche Funktion vorkommen. Jene willkührlichen Constanten müssen daher dadurch bestimmt werden, daß man in die gegebene Gleichung den gefundenen Werth von $z_{x,y}$ substituirt und hierauf die ähnlichen Glieder in x mit einander vergleicht.

§. 112. Um diese Methode auf ein specielles Beispiel anzuwenden, sei die Gleichung:

$z_{x,y} = 2z_{x,y-1} + 2z_{x-1,y-1}$, welche, wenn darin:

$z_{0,1} = 0$, $z_{1,1} = 1$, $z_{2,1} = 0$, $z_{3,1} = 0$ u. s. w.

gesetzt wird, uns folgende Tafel mit doppeltem Eingang liefert:

	1	2	3	4	5	.	.	.	.	x
1	1	0	0	0	0	.	.	.	.	ic.
2	2	2	0	0	0	.	.	.	.	.
3	4	8	4	0	0	.	.	.	.	.
4	8	24	24	8	0	.	.	.	.	.
5	16	64	96	64	16	.	.	.	.	.
6	32	160	320	320	160	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
y	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Im gegenwärtigen Fall ist $B_x = 2$, $B'_x = 2$, $A_x = 0$, $A'_x = 0$ u. s. w.; wonach wir folgende Gleichungen erhalten:

$$M_x = M_{x-1} + 2,$$
$$N_x = N_{x-1} + 2M_{x-1},$$
$$P_x = P_{x-1} + 2N_{x-1}, \text{ u. s. w.}$$

Die erste dieser Relationen gibt $M_x = c + 2x$ oder blos $M_x = 2x$, wenn man die vorgelegte Gleichung mit $x = 1$ beginnen läßt. Wir haben dann $N_x = c + 4\Sigma(x-1) = 4\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}$, unter der Bedingung, daß unsere Gleichung mit $x = 1$ ihren Anfang erhält.

Die dritte Gleichung gibt jetzt:

$$P_x = c + 8\cdot\tfrac{1}{2}\Sigma(x-1)(x-2) = 8\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3},$$

weil die Constante wieder verschwinden muß; u. s. w. Was die Funktion D_x anlangt, so wird dieselbe hier Null. Mittelst dieser Resultate verwandelt sich die Gleichung (x) des vorhergehenden Paragraphen in:

$$z_{x,y} - 2xz_{x,y-1} + 2^2\cdot\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}z_{x,y-2} - 2^3\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}z_{x,y-3} + \text{ic.} = 0.$$

Dieser Gleichung geschieht Genüge, wenn man $z_{x,y} = \lambda^y$ nimmt, wo λ aus der Gleichung:

$$1 - \frac{2x}{\lambda} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{2^2}{\lambda^2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{2^3}{\lambda^3} + \text{ic.} = 0,$$

oder $\left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)^x = 0$ bestimmt wird, mithin für λ sich nur der einzige Werth $\lambda = 2$ ergibt.

Wir machen jetzt $z_{x,y} = u_{x,y}\cdot 2^y$ und substituiren diesen Werth in die obige Gleichung. Dieselbe verwandelt sich hierdurch in:

$$u_{x,y} - xu_{x,y-1} + \frac{x(x-1)}{1\cdot 2}u_{x,y-2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u_{x,y-3} + \text{ic.} = 0,$$

was mit $\Delta^x u_{x,y} = 0$ gleichbedeutend ist. Die letztere Bedingung wird erfüllt, wenn man für $u_{x,y}$ eine in Bezug auf y rationale und ganze Funktion vom $(x-1)$ten Grade wählt.

Man kann mithin der Funktion $u_{x,y}$ folgende Form ertheilen:

$$u_{x,y} = c_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(x-1)} +$$
$$c'_x \frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{1\cdot2\cdot3\ldots(x-2)} +$$
$$c''_x \frac{(y-1)(y-2\ldots(y-x+3)}{1\cdot2\cdot3\ldots(x-3)} + \text{ic.}$$

Um die Größen c_x, c'_x, $c''_x \ldots$ zu bestimmen, setzen wir in die vorgelegte Gleichung statt $z_{x,y}$ seinen Werth. Wir erhalten auf diese Art, wenn wir die willkührlichen Funktionen c_x, $c'_x \ldots$ in Bezug auf x variiren lassen, und erwägen, daß:

$$\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+1)}{1\cdot2\ldots(x-1)} = \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x)}{1\cdot2\ldots(x-1)} + \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+1)}{1\cdot2\ldots(x-2)},$$

$$\frac{(y-1)(y-2)\ldots(y-x+2)}{1\cdot2\ldots(x-2)} = \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+1)}{1\cdot2\ldots(x-2)} + \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+2)}{1\cdot2\ldots(x-3)},$$

u. s. w. ist, folgendes Resultat:

$$c_x \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x)}{1\cdot2\ldots(x-1)} + (c_x + c'_x)\frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+1)}{1\cdot2\ldots(x-2)}$$
$$+ (c'_x + c''_x)\frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+2)}{1\cdot2\ldots(x-3)} + \text{ic.} =$$
$$c_x \frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x)}{1\cdot2\ldots(x-1)} + (c'_x + c_{x-1})\frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+1)}{1\cdot2\ldots(x-2)}$$
$$+ (c''_x + c'_{x-1})\frac{(y-2)(y-3)\ldots(y-x+2)}{1\cdot2\ldots(x-3)} + \text{ic.}$$

Aus der Zusammenstellung der ähnlichen Glieder ergibt sich: $c_x = c_{x-1}$, $c'_x = c'_{x-1}$ u. s. w., d. h. $c_x = c$, $c'_x = c'$, u. s. w., wo c, c' ic. constante Größen sind.

Um dieselben zu bestimmen, mache man zuförderst: $x=1$; man hat dann $u_{1,y} = c$ und $z_{1,y} = c2^y$. Die erste Linie der Tafel gibt aber $z_{1,1} = 1$; mithin $c = \frac{1}{2}$.

Für $x=2$ erhält man:

$$u_{2,y}=\frac{c(y-1)}{1}+c' \text{ und } z_{2,y}=2^y\left(\frac{c(y-1)}{1}+c'\right).$$

Die erwähnte Linie gibt $z_{2,1}=0$; woraus $c'=0$.

Für $x=3$ bekommt man $u_{3,y}=\frac{c(y-1)(y-2)}{1\cdot 2}+\frac{c'(y-1)}{1\cdot 2}+c''$

und $$z_{3,y}=2^y\left(\frac{c(y-1)(y-2)}{1\cdot 2}+\frac{c'(y-1)}{1\cdot 2}+c''\right).$$

Es ist aber wieder $z_{3,1}=0$; folglich $c''=0$.

Auf diese Art fortgefahren, findet man, daß alle übrigen Constanten c''', c^{IV} u. s. w. Null sind. Für das allgemeine Glied der in unserer Tafel enthaltenen Zahlenreihe ergibt sich hiernach endlich der Ausdruck:

$$z_{x,y}=2^{y-1}\,\frac{(y-1)(y-2)\,.\,.\,.\,(y-x+1)}{1\cdot 2\,.\,.\,.\,.\,(x-1)}.$$

Anwendung der inversen Differenzenrechnung auf verschiedene Aufgaben.

§. 113. Das summatorische Glied der Doppelreihe, welche unter dem Namen der Pythagoräischen Tafel oder das Einmaleins bekannt ist, zu finden.

Diese Reihe ist:

	1	2	3	. . .	x
1	1	2	3	. . .	x
2	2	4	6	. . .	2x
3	3	6	9	. . .	3x
⋮					
y	y	2y	3y	. . .	xy

Wie wir für eine einfache Reihe, deren allgemeines Glied $y=fx$ ist, das summatorische Glied $S=\underset{x}{\Sigma}f(x+1)$ gefunden haben; ebenso findet man für eine Doppelreihe, deren allgemeines Glied $z=f(x,y)$ ist, das summatorische Glied $S=\underset{x,y}{\Sigma^2}f(x+1,y+1)$. Für den gegenwärtigen Fall also $S=\underset{x,y}{\Sigma^2}(x+1)(y+1)$, oder wenn man die im

§. 108 angeführten Integrationsformeln zu Hülfe nimmt, ferner x+1 und y+1 statt x und y setzt und endlich h=k=1 macht:

$$S=\frac{(x+1)(x+1)xv}{4}+\varphi x+\psi y.$$

Um die willkührlichen Funktionen φx und ψy zu bestimmen, erwäge man, daß für $x=1$ und $y=1$ auch $S=1$ wird: folglich $1=1+\varphi x+\psi y$, wonach die willkührlichen Funktionen hier wegfallen. Das summatorische Glied ist daher:

$$S=\frac{x(x+1)y(y+1)}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}.$$

§. 114. Es sei x der Sinus und y der Cosinus eines Winkels z. Vermittelst der Relation:

$$\sin nz=2y\sin(n-1)z-\sin(n-2)z\ldots(1)$$

(siehe §. 43 der analytischen Geometrie der Ebene) läßt sich folgende Tabelle aufstellen:

$$\begin{aligned}
\sin z&=x,\\
\sin 2z&=x\cdot 2y,\\
\sin 3z&=x(4y^2-1),\\
\sin 4z&=x(8y^3-y),\\
\sin 5z&=x(16y^4-12y^2+1),\\
\sin 6z&=x(32y^5-32y^3+6y),\ \text{u. s. w.,}
\end{aligned}$$

welche so beliebig weiter fortgeführt werden kann. Wir wollen nun versuchen, den allgemeinen Ausdruck für $\sin nz$ direct aufzufinden. Man sieht bald ein, daß man:

$$\begin{aligned}
\sin nz&=x(Ay^{n-1}+By^{n-3}+Cy^{n-5}+\text{etc.})\ \text{folglich auch:}\\
\sin(n-1)z&=x(A'y^{n-2}+B'y^{n-4}+C'y^{n-6}+\text{etc.}),\\
\sin(n-2)z&=x(A''y^{n-3}+B''y^{n-5}+C''y^{n-7}+\text{etc.})
\end{aligned}$$

setzen kann. Substituirt man diese Werthe von $\sin(n-1)z$ und $\sin(n-2)z$ in die Gleichung (1), so hat man:

$$\begin{aligned}
\sin nz=&\,2x(A'y^{n-1}+B'y^{n-3}+C'y^{n-5}+\text{etc.})\\
&-x(A''y^{n-3}+B''y^{n-5}+C''y^{n-7}+\text{etc.}).
\end{aligned}$$

Durch vergleichende Zusammenstellung dieses zweiten Ausdruckes von $\sin nz$ mit dem erstern, ergeben sich folgende Relationen:

$$2A' - A = 0,$$
$$2B' - B = A'',$$
$$2C' - C = B'',$$
$$2D' - D = C'', \text{ u. s. w.}$$

welche mit:
$$2A - A_1 = 0,$$
$$2B - B_1 = A',$$
$$2C - C_1 = B',$$
$$2D - D_1 = C', \text{ u. s. w. übereinstimmend sind.}$$

Das endliche Integral von $2K - K_1 = X$ ist aber nach §. 96, wenn x die Zahl der dem K vorhergehenden Glieder bezeichnet:

$$K = 2^x \left(c - \Sigma \frac{X}{2^{x+1}}\right).$$

Indem wir von dieser Formel Gebrauch machen, um die vorstehende Reihe von Differenzengleichungen zu integriren, haben wir für die erste:

$$x = n - 1 \text{ und } X = 0 \text{ : mithin } A = c \cdot 2^{n-1}.$$

Erwägt man, daß für $n = 1$ auch $A = 1$ wird; so kommt $c = 1$: folglich $A = 2^{n-1}$.

Für die zweite Gleichung hat man $x = n - 2$, ferner $X = A' = 2^{n-2}$;

mithin:
$$B = 2^{n-2}(c - \tfrac{1}{2}\Sigma 1) = 2^{n-2}\left(c - \frac{n-2}{2}\right).$$

Für $n = 2$ verschwindet die Größe B; es entsteht hiernach:

$$B = -2^{n-3}(n-2).$$

Für die dritte Gleichung ist $x = n - 3$ und $X = B' = -2^{n-4}(n-3)$. Daraus ergibt sich:

$$C = 2^{n-3}[c + \tfrac{1}{4}\Sigma(n-3)] = 2^{n-3}\left(c + \tfrac{3}{4} + \frac{(n-3)(n-4)}{8}\right).$$

Für $n = 3$ muß C Null werden; hiernach wird:

$$C = 2^{n-5}\frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

Man hat ferner:

$$D=2^{n-4}\left(c-\frac{\Sigma(n-4)(n-5)}{16}\right), \text{ oder}$$

$$D=2^{n-4}\left(c+\tfrac{5}{2}-\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3\cdot 16}\right).$$

Bestimmt man die Constante c mittelst der Bedingung, daß D für $n=4$ verschwinden muß; so bekommt man:

$$D=-2^{n-7}\cdot\frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2\cdot 3}; \text{ u. s. w.}$$

Man vergleiche hiermit den §. 184 der „höhern Algebra."

§. 115. Die Benutzung eines Kapitals a steht Jemanden in der Weise zu, daß ihm jedesmal der $\frac{1}{n}$te Theil von den jährlichen Zinsen, welche den $\frac{1}{m}$ten Theil des jeweiligen Kapitals betragen, zurückgehalten wird: hiernach wäre also z. B. am Ende des ersten Jahres nur die Summe $\frac{a}{m}-\frac{a}{mn}$ auszuzahlen. Hätte man nun aber jedes Jahr die Summe $\frac{a}{m}$ bezahlt, mithin mehr als man schuldig gewesen, und diesen Mehrbetrag zur Tilgung des Kapitalfonds verwendet; so fragt es sich, was aus demselben nach Verlauf von x Jahren geworden ist.

Es sei y der Werth des Kapitals zu dieser Zeit; am Ende des xten Jahres wäre dann zu zahlen $\frac{y}{m}-\frac{y}{mn}$. Ist dagegen $\frac{a}{m}$ bezahlt worden, so wird das Kapital um $\frac{a}{m}-\frac{y}{m}+\frac{y}{mn}$ abgenommen haben. Es besteht demnach zwischen dem Werthe des Kapitals am Ende des $(x+1)$ten Jahres, welcher Werth durch y_1 dargestellt werden mag, und dem Werthe des Kapitals y die Relation:

$$y_1=y\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)-\frac{a}{m}.$$

Für das endliche Integral dieser Differenzgleichung bekommt man nach §. 96:

$$y=\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x\left[c-\frac{a}{m}\Sigma\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^{-x-1}\right].$$

Es ist aber $\Sigma\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^{-x-1}$ mit der Summe der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x},\ \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^{x-1}},\ \ldots\ \frac{1}{1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}},$$

gleichbedeutend. Man hat folglich:

$$y=\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x\left\{c-\frac{a}{m}\frac{\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x-1}{\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^x}\right\}.$$

Die willkührliche Constante bestimmt man dadurch, daß $y=a$ für $x=1$ wird. Man erhält hiernach:

$$y=\frac{a}{n-1}\left[n-\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)^{x-1}\right].$$

Für die Zeit, nach welcher das Kapital Null sein würde, findet man:

$$x=1+\frac{\log n}{\log\left(1+\frac{1}{m}-\frac{1}{mn}\right)}.$$

§. 116. Die Rechnung mit endlichen Differenzen findet häufig ihre Anwendung bei Aufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung. La Place und Lagrange waren es, welche zuerst eine solche Anwendung auf eine deutliche Art auseinander setzten. Einige Beispiele werden hinreichend sein, um uns den Gebrauch der Differenzenrechnung bei Auflösung von dergleichen Aufgaben zu zeigen.

Wir wählen zuerst das in einer Note der „höhern Algebra“ schon behandelte Beispiel, suchen nämlich die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn man zufällig in einen Haufen von x vollkommen gleichen Kugeln greift, man entweder eine gerade oder ungerade Anzahl derselben greifen wird. Wir wollen die Zahl der ungeraden Combinationen, welche bei x Kugeln vorkommen können, durch U_x, und durch G_x jene der geraden Combinationen darstellen. Wenn nun x um 1 wächst,

so ist die Anzahl der geraden Combinationen, d. h. G_{x+1}, offenbar gleich der vorigen Anzahl G_x, vermehrt um die Summe U_x, indem augenscheinlich die (x+1)te Kugel mit jeder der vorigen ungeraden Combinationen eine gerade Combination eingeht; es ist demnach

$$G_{x+1} = G_x + U_x \ldots (1).$$

Was die Anzahl der ungeraden Combinationen bei x+1 Kugeln anlangt, so besteht dieselbe aus der vorigen Anzahl ungerader Combinationen, nämlich aus U_x, ferner aus der Anzahl der geraden Combinationen G_x, indem die (x+1)te Kugel mit jeder der geraden Verbindungen eine ungerade Combination liefert, und endlich aus der Einheit, da diese Kugel für sich genommen ebenfalls eine ungerade Combination gibt; es ist mithin:

$$U_{x+1} = U_x + G_x + 1 \ldots (2).$$

Mit Berücksichtigung der Gleichung (1) verwandelt sich die Gleichung (2) in:

$$U_{x+1} = G_{x+1} + 1,$$

oder, wenn man x um 1 vermindert; in:

$$U_x = G_x + 1.$$

Mittelst dieses Werthes von $G_x + 1$ geht die Gleichung (2) in:

$$U_{x+1} = 2U_x \text{ über},$$

welcher Differenzengleichung das endliche Integral $U_x = c2^x$ entspricht. Da für x=1 unser U_x sich auf 1 reduciren muß, so hat man $c=\frac{1}{2}$; es ist daher: $U_x = 2^{x-1}$.

Aus der Gleichung $U_x = G_x + 1$ folgt $G_x = 2^{x-1} - 1$. Da nun die Anzahl aller möglichen Fälle $= 2^x - 1$ ist, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, eine ungerade Anzahl Kugeln zu greifen, $= \frac{2^{x-1}}{2^x - 1}$, und die Wahrscheinlichkeit, eine gerade Anzahl zu ziehen, $= \frac{2^{x-1} - 1}{2^x - 1}$, welche Resultate mit den in der „höhern Algebra“ gefundenen vollkommen übereinstimmen.

§. 117. Ein Spieler wettet, bei einer gegebenen Anzahl a von Versuchen b mal wenigstens ein bestimmtes Ereigniß, dessen einfache Wahrscheinlichkeit p ist, hervorzubringen: man soll die Wahrschein-

lichkeit dieses Spielers ausmitteln. — Bezeichnet $z_{x,y}$ die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen, sobald der Spieler noch x Versuche anzustellen hat und ihm noch y Wiederholungen des bezeichneten Ereignisses fehlen; so wird $z_{a,b}$ die verlangte Wahrscheinlichkeit sein. Indem nun der Spieler einen weitern Versuch macht, wird $z_{x-1,y-1}$ die Wahrscheinlichkeit für seine Aussage sein, wenn er das fragliche Ereigniß, dessen einfache Wahrscheinlichkeit p ist, trifft, dagegen $z_{x-1,y}$, wenn er dasselbe nicht getroffen hat, wofür die einfache Wahrscheinlichkeit (1 — p) besteht. Den Regeln der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit zufolge ist jetzt:

$$z_{x,y} = pz_{x-1,y-1} + (1-p)\,z_{x-1,y},$$

oder, wenn x und y mit x+1 und y+1 vertauscht wird:

$$pz_{x,y} + (1-p)\,z_{x,y+1} - z_{x+1,y+1} = 0.$$

Indem man diese Gleichung mit der Gleichung des §. 109 zusammenhält, bekommt man $A=p$, $B=0$, $B'=1-p$, $C'=-1$.

Im gegenwärtigen Fall folglich:

$$-\left(\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^y = \left(\frac{-p}{1-p-\alpha}\right)^y = \frac{p^y}{\alpha^y}\left(\frac{1}{1-\frac{1-p}{\alpha}}\right)^y =$$

$$p^y\left[\alpha^{-y} + y(1-p)\alpha^{-y-1} + \frac{y(y+1)}{1\cdot 2}(1-p)\alpha^{2-y-2} + \text{ꝛc.}\right]$$

Mit Hülfe des erwähnten Paragraphen ergibt sich hiernach das endliche Integral:

$$z_{x,y} = p^y\left[z_{x-y,0} + y(1-p)z_{x-y-1,0} + \frac{y(y+1)}{1\cdot 2}(1-p)^2 z_{x-y-2,0} + \text{ꝛc.}\right].$$

Erwägt man, daß der Natur der Aufgabe zufolge, der Spieler gewinnt, wenn $y=0$ und x eine beliebige Zahl ist, und verliert, wenn $x=0$ und y größer als Null ist; so hat man $z_{x,0}=1$ für jedes beliebige x und $z_{0,y}=0$, wo $y>0$ ist. Offenbar ist aber auch $z_{s,0}=0$, wo s eine beliebige negative Zahl bedeutet.

Mittelst dieser Bedingungen geht unser vorhergehende Ausdruck in:

$$z_{x,y} = p^y\left[1 + \frac{y}{1}(1-p) + \frac{y(y+1)}{1\cdot 2}(1-p)^2 + \ldots\right.$$
$$\left. + y(y+1)\ \ldots\ [y+(x-y-1)]\,(1-p)^{x-t}\right.$$ über.

Indem man x in a und y in b umwandelt, erhält man für die

Wahrscheinlichkeit, bei a Versuchen, wenigstens 6 mal ein bestimmtes Ereigniß zu treffen, den Ausdruck:

$$z_{a,b}=p^b\,[1+b(1-p)+\frac{b\,(b+1)}{1\cdot 2}(1-p)^2+\ldots$$

$$+\frac{b(b+1)\;.\;.\;.\;(a-1)}{1\cdot 2\;.\;.\;.\;(a-b)}(1-p)^{a-b}].$$

§. 118. Zwei Spieler A und B haben beziehungsweise die einfachen Wahrscheinlichkeiten p und q, um eine Parthie zu gewinnen. Nun fehlen dem A noch a, dem B noch b Parthien, um den ganzen Einsatz zu erhalten. Es ist die Frage, welche Wahrscheinlichkeit jeder dieser Spieler für sich hat, das Spiel zu gewinnen. Es sei $z_{x,y}$ die Wahrscheinlichkeit, welche B für sich hat, sobald er noch y Parthien gewinnen muß, ehe A x Parthien gewinnt; die gesuchte Wahrscheinlichkeit für B wird dann $z_{a,b}$ sein. Wird nun die nächste Parthie gespielt, so geht $z_{x,y}$ in $z_{x-1,y}$ über, wenn A dieselbe gewinnt, welches Ereigniß die Wahrscheinlichkeit p hat; dagegen verwandelt sich $z_{x,y}$ in $z_{x,y-1}$ insofern B diese nächste Parthie gewinnt, ein Ereigniß, dessen Wahrscheinlichkeit q ist. Man erhält hiernach die Differenzengleichung:

$$z_{x,y}=pz_{x-1,\,y}+qz_{x,y-1},$$

oder, wenn x+1 und y+1 statt x und y geschrieben wird:

$$pz_{x,\,y+1}+qz_{x+1,\,y}-z_{x+1,\,y+1}=0.$$

Wird diese Gleichung abermals mit der Gleichung des §. 109 zusammengestellt, so haben wir hier:

$C'=-1$, $B=q$, $B'=p$, $A=0$; folglich:

$$\beta^y\left(-\frac{A+B\alpha}{B'+C'\alpha}\right)^y=q^y\left(\frac{1}{1-\frac{p}{\alpha}}\right)^y=$$

$$q^y\,[1+y\frac{p}{\alpha}+\frac{y(y+1)}{1\cdot 2}\frac{p^2}{x^2}+\frac{y(y+1)(y+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{p^3}{\alpha^3}+ \text{ꝛc.}$$

Wir erhalten damit für das endliche Integral den Ausdruck:

$$z_{x\,y}=q^y\,[z_{x,0}+ypz_{x-1,0}+\frac{y\,(y+1)}{1\cdot 2}p^2z_{x-2,0}+\text{ꝛc.}],$$

Der Spieler B gewinnt nun, wenn $y=0$ und x eine beliebige positive Zahl ist, und verliert, wenn $x=0$ und y irgend eine positive Zahl bedeutet; es folgt daraus:

$$z_{x,0}=1, \text{ wo } x>0 \text{ und } z_{0,y}=0, \text{ wo } y>0;$$

es ist ferner: $z_{0,0}=0$, $z_{0,-s}=0$.

Man hat demnach für B, die Wahrscheinlichkeit das Spiel zu gewinnen, den Ausdruck:

$$z_{x,y}=q^y\left[1+py+\frac{y(y+1)}{1\cdot2}p^2+\ldots+\frac{y(y+1)\ldots(y+x-2)}{1\cdot2\ldots(x-1)}p^{x-1}\right],$$

worin nur noch x mit a und y mit b zu vertauschen ist.

Aendert man q in p und y in x und umgekehrt, so erhält man für die Wahrscheinlichkeit von A, das Spiel zu gewinnen, den Ausdruck:

$$z_{x,y}=p^x\left[1+xq+\frac{x(x+1)}{1\cdot2}q^2\ldots+\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+y-2)}{1\cdot2\ldots(y-1)}q^{y-1}\right].$$

Anmerkung. Diejenigen, welche die Rechnung mit endlichen Differenzen und deren Anwendung auf verschiedene Gegenstände ausführlicher durchgehen wollen, verweisen wir auf folgende Werke:

1. Traité du calcul différential et intégral, par Lacroix. 3e. vol.
2. Lagrange, dans les mémoires de Berlin. Année 1775.
3. La Place et Condorcet, dans les mémoires de l'académie des sciences de Paris. 1770, 1771, 1779, etc.
4. Théorie analytique des probabilités, par La Place.
5. Petri Paoli, opuscula analytica.
6. Corso di matematica sublime. Del Dot. Vincenzio Brunacci.

Viertes Kapitel.

Rechnung mit gemischten Differenzen.

Von den Gleichungen mit gemischten Differenzen.

§. 119. Es können Aufgaben vorkommen, wo die vorgeschriebene Bedingung in die Sprache der Analysis übertragen, zu Gleichungen führt, in denen die Differenzen mit den Differenzialcoefficienten gleichzeitig erscheinen: es entsteht daraus die Rechnung mit gemischten Differenzen. Obgleich man in der Behandlung solcher Gleichungen mit gemischten Differenzen noch wenig vorgerückt ist, so können wir diesen Gegenstand, der sich schon frühzeitig den Geometern bei ihren Untersuchungen darbot, doch nicht ganz mit Stillschweigen übergehen. Die Gleichungen:

$$a\frac{dy}{dx}+b\Delta y+cy=0, \text{ und}$$

$$ad\frac{\Delta y}{dx}+b\frac{dy}{dx}+c\Delta y+fy=0,$$

wo a, b, c, f constante Größen darstellen, sind die einfachsten der dahin gehörigen Gleichungen; dieselben sind sowohl in Bezug auf die Differentialcoefficienten als auch auf die Funktionen und deren Differenzen vom ersten Grade und von der ersten Ordnung. Man thut jenen beiden Gleichungen Genüge, wenn man $y=C\varepsilon^{mx}$ setzt: die erstere geht dadurch in: $am+b(\varepsilon^m-1)+c=0$, und die zweite in: $am(\varepsilon^m-1)+bm+c(\varepsilon^m-1)+f=0$ über.

Die Werthe von m, welche diese Gleichungen befriedigen, werden einen mit einer willkührlichen Constante versehenen Ausdruck für y liefern.

§. 120. Bei den Gleichungen mit gemischten Differenzen hat man zwei wesentlich von einander verschiedene Integrationen zu unterscheiden, nämlich die eine in Bezug auf das charakterisirende Zeichen Δ und die andere in Bezug auf das charakterisirende Zeichen d. Beginnt man die Integration in Bezug auf die Differentialcoefficienten, so erhält man vorerst ein Resultat mit einer willkührlichen Constante, die mit den Differenzen vorgenommene Integration bringt dann eine willkührliche Funktion mit sich, wie wir dies am folgenden Beispiele sehen. Es sei:

$$\Delta y = x\frac{d\Delta y}{dx} - \tfrac{1}{4}\left(\frac{d\Delta y}{dx}\right)^2.$$

Setzt man $\Delta y = z$, so kommt:

$$z = x\frac{dz}{dx} - \tfrac{1}{4}\frac{dz^2}{dx^2}.$$

Durch Differentiation ergibt sich:

$$\left(x - \tfrac{1}{2}\frac{dz}{dx}\right)\frac{d^2z}{dx^2} = 0; \text{ woraus:}$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 0,\ \frac{dz}{dx} = a,\ z = ax - \tfrac{1}{4}a^2.$$

Indem man für z seinen Werth setzt, erhält man:

$$\Delta y = ax - \tfrac{1}{4}a^2,\ y = \Sigma(ax - \tfrac{1}{4}a^2) + \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x);\ \text{folglich:}$$
$$y = \tfrac{1}{2}a(x^2 - x) - \tfrac{1}{4}a^2x + \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x).$$

Der andere Factor, welcher zu der besondern Auflösung der Differentialgleichung in z führt, gibt $z = \Delta y = x^2$, woraus

$$y = \frac{x^3}{3} - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x + \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x).$$

§. 121. Integrirt man dagegen zuerst in Bezug auf Differenzen, so ist man öfters genöthigt, die dabei eingeführte willkührliche Funktion zu specialisiren, um die Integration mit Differentialen zu bewerkstelligen. Es sei z. B. die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = x\,\Delta\frac{dy}{dx} - \tfrac{1}{4}\left(\Delta\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Man setze $\frac{dy}{dx} = p$: unsere Gleichung verwandelt sich dadurch in:

$$p = x\Delta p - \tfrac{1}{4}\Delta p^2.$$

Indem man zu den Differenzen übergeht, erhält man:

$$[x+1-\frac{1}{4}(2\Delta p+\Delta^2 p)]\Delta^2 p=0.$$

Der Factor $\Delta^2 p$ gibt $\Delta p=a$, woraus $p=ax-\frac{1}{4}a^2$; welche Differentialgleichung zum Integral:

$$y=\frac{1}{2}ax^2-\frac{1}{4}a^2x+b \text{ hat,}$$

wenn man für a eine einfache Constante wählt. Nimmt man hingegen für a seinen allgemeinen Werth, so bekommt man:

$$y=\int x dx \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x)-\frac{1}{4}\int dx \varphi(\sin 2\pi x, \cos 2\pi x),$$

wo das Resultat mit dem Integralzeichen $\int$ behaftet ist.

Aehnliches gilt von dem andern Factor:

$$x+1-\frac{1}{2}(2\Delta p+\Delta^2 p)=0, \text{ oder von:}$$

$$p_2-p-4x-4=0.$$

Anmerkung. Es lassen sich die Gleichungen mit gemischten Differenzen in reine Differentialgleichungen dadurch umwandeln, daß man statt Δy, $\Delta \frac{dy}{dx}$... deren Werthe in Differentialcoefficienten ausgedrückt einführt (§. 62). Man kann auch jene Gleichungen in Gleichungen, wo blos Differenzen vorkommen, umändern, wenn man statt der Differentialcoefficienten deren Entwickelungen mittelst der Differenzen substituirt (§. 66). Den so transformirten Gleichungen auf eine möglichst allgemeine Weise Genüge zu leisten ist dann die Frage, deren vollständige Beantwortung bis jetzt nur in seltenen Fällen gelungen ist.

Anwendung der Gleichungen mit gemischten Differenzen auf geometrische Probleme.

§. 122. Es dürfte von einigem Interesse sein, den Gebrauch der Rechnung mit gemischten Differenzen bei Auflösung geometrischer Probleme kennen zu lernen, weshalb wir folgende Aufgaben hersetzen:

Die Curve TMT′ (Fig. 12) zu finden, für welche der Durchschnittspunkt R je zweier Berührungslinien, die in den Endpunkten T und T′ einer durch den gegebenen Punkt A gelegten Sehne TT′ gezogen werden, fortwährend in einer gegebenen geraden Linie liegt.

Wir wollen, um die Rechnung zu vereinfachen, den gegebenen Punkt A, durch welchen alle Sehnen gehen, zum Ursprung des rechtwinkelichten Coordinatensystems, ferner die Richtung der Ordinaten parallel zu der gegebenen Geraden nehmen, auf welcher sämmtliche Durchschnittspunkte der Berührungslinie liegen sollen. Ist nun a der Abstand der letzteren Geraden vom Ursprung, ferner x, y und x′, y′, die Coordinaten der Endpunkte einer Sehne, und Y die Ordinate des Durchschnitts der in diesen Endpunkten gezogenen Berührungslinien; so bestehen die Gleichungen:

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(a-x),$$

$$Y-y'=\frac{dy'}{dx'}(a-x').$$

Aus demselben folgt:

$$y'+(a-x')\frac{dy'}{dx'}-\left(y+(a-x)\frac{dy}{dx}\right)=0, \text{ oder:}$$

$$\Delta\left(y+(a-x)\frac{dy}{dx}\right)=0.$$

Erwägt man, daß die Punkte (x, y) und (x′, y′) mit dem Ursprung der Coordinaten auf einer und derselben geraden Linie liegen, was die Bedingungsgleichung $\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'}$ zur Folge hat; so erhält man durch Integration in Bezug auf das Zeichen Δ die Differentialgleichung der in Frage stehenden Curve:

$$y+(a-x)\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

wo φ eine willkührliche Funktion darstellt, die sich nicht ändert, wenn x und y in x′ und y′ übergeht. Um unsere Differentialgleichung zu integriren, machen wir $\frac{y}{x}=u$; sie verwandelt sich dadurch in:

$$\frac{dx}{x(a-x)}+\frac{du}{au-\varphi u}=0.$$

Durch Integration ergibt sich für die verlangte Curve die Gleichung:

$$l\frac{x}{a-x}+a\int\frac{du}{au-\varphi u}=c.$$

Setzen wir z. B. $\varphi u = \frac{a}{u}$ und nehmen dabei die Constante $c = \sqrt{b}$, so bekommen wir: $\left(\frac{x}{a-x}\right)^2 (u^2-1) = b$, oder in Erwägung, daß: $ux = y$ ist: $y^2 - x^2 = b(a-x)^2$, welche Gleichung eine Linie der zweiten Ordnung ausdrückt.

§. 123. Eine Curve M′CM (Fig. 13) von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man dieselbe in einem ihrer Punkte C um eine gegebene Achse AC herumdreht, um sie dadurch in eine der ersteren genau entgegengesetzte Lage zu bringen, und hierauf diese Curve N′CN längs gedachter Achse parallel zu ihr selbst fortführt, dieselbe die erstere M′CM überall unter einem gegebenen Winkel 2c schneidet. — Der Natur der Aufgabe zufolge ist

Winkel M′CN = 2 Winkel MCA =

Winkel M′MR = Winkel CMP + Winkel RMP.

Wegen des bei der Bewegung stattfindenden Parallelismus der Curve N′CN ist

Winkel RMP = Winkel QNP;

ferner ist, insofern AP′ = AP genommen wird,

Winkel QNP = Winkel Q′M′P′,

weil die Curve N′CN eine der M′CN genau entgegengesetzte Lage besitzt. Hiernach besteht die Relation:

2c = Winkel CMP + Winkel Q′M′P′,

welche, wenn man AP = x, AP′ = x′, die senkrechte Ordinate PM = y und die Ordinate P′M′ = y′ setzt, und erwägt, daß:

$\text{tang}\, CMP = \frac{dx}{dy}$ und $\text{tang}\, Q'M'P' = \frac{dx'}{dy'}$, ferner, der Kürze halber,

$\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dy'}{dx'} = p'$ schreibt, in:

$$2c = \text{Winkel}\left(\text{tang} = \frac{1}{p}\right) + \text{Winkel}\left(\text{tang} = \frac{1}{p'}\right)$$

übergeht, wobei die Gleichung $x + x' = 0$ das Gesetz ausdrückt, nach welchem sich x ändert. Diese beiden Gleichungen mit gemischten Differenzen gehören der vorliegenden Aufgabe an, in der Weise, daß eine derselben eine nothwendige Folge der andern ist. Um die

Gleichung $x' = -x$ zu integriren, setzen wir nach dem in Note XII Gesagten,

$$u_{z+1} = x', \; u_z = x; \text{ wir erhalten so: } u_z = b(-1)^z = x.$$

Auf ähnliche Art finden wir Winkel $\left(\text{tang} = \frac{1}{p}\right) = c + B(-1)^z$: b und B sind hier willkührliche Funktionen von $\sin 2\pi z$ und $\cos 2\pi z$. Indem wir die Variable z eliminiren und $\frac{B}{b} = a$ setzen, erhalten wir Winkel $\left(\text{tang} = \frac{1}{p}\right) = c + ax$, oder, $\frac{1}{p} = \text{tang}(c+ax)$; woraus

$$p = \frac{1}{\text{tang}(c+ax)} = \frac{1 - \text{tang}\, c\, \text{tang}\, ax}{\text{tang}\, c + \text{tang}\, ax} =$$

$$\frac{1 + \cos 2c - \sin 2c\, \text{tang}\, ax}{\sin 2c + (1 + \cos 2c)\, \text{tang}\, ax} =$$

$$\cot 2c + \frac{1}{\sin 2c} \left\{ \frac{1 - \frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\, \text{tang}\, ax}{1 + \frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\, \text{tang}\, ax} \right\},$$

wenn wir erwägen, daß $\text{tang}\, c = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos 2c}{1 + \cos 2c}\right)} = \frac{\sin 2c}{1 + \cos 2c}$.

Da die Größe a als eine willkührliche Funktion betrachtet werden muß, die sich nicht ändert, wenn x mit $-x$ vertauscht wird; so machen wir $-\frac{1 + \cos 2c}{\sin 2c}\, \text{tang}\, ax = Xx$, wo X eine beliebige Funktion von x darstellt, welche beim Uebergange von $+x$ in $-x$ constant bleibt. Auf diese Art erhalten wir:

$$p = \cot 2c + \frac{1}{\sin 2c}\left(\frac{1 + Xx}{1 - Xx}\right), \text{ woraus:}$$

$$y = x \cot 2c + \frac{1}{\sin 2c} \int dx \left(\frac{1 + Xx}{1 - Xx}\right).$$

Nimmt man $X = 0$, so bekommt man zuvörderst die gerade Linie, welche in der That der vorliegenden Aufgabe Genüge thun muß.

§. 124. Die Curve von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn man von jedem ihrer Punkte M (Fig. 14) zwei gerade Linien MA, MM′ unter dem nämlichen Winkel mit der Berührenden TM zieht, wo die erstere jener Linien nach einem bestimmten Punkte A gerichtet ist, während die zweite von der Curve begrenzt wird, die Geraden

$M'M$ und $M'A$ mit der Berührungslinie $M'T'$ denselben Winkel bilden. Die Bedingungen der Aufgabe geben uns die Gleichungen:

$$\text{Winkel } AMT = \text{Winkel } M'MR,$$
$$\text{Winkel } AM'V = \text{Winkel } MM'R,$$

von denen die eine das Gesetz ausdrückt, nach welchem x sich ändern muß. Es sei nun:

$$AP = x,\ MP = y,\ AP' = x',\ P'M' = y',$$
$$\frac{dy}{dx} = p,\ \frac{dy'}{dx'} = p',\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = P.$$

Ziehen wir $M'Q$ zur Abscissenachse AX parallel und verlängern MP bis Q; so haben wir:

$$\operatorname{tang} MM'Q = \frac{MQ}{M'Q} = \frac{MP + M'P'}{M'Q} = \frac{y - y'}{x' - x} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -P,$$

indem auf das Zeichen von y' keine Rücksicht genommen wird, welches in unserer Figur als negativ angesehen werden kann. Erwägt man, daß die Winkel $MM'Q$, MCT, $M'CT'$ einander gleich sind, und betrachtet die Dreiecke MCT und AMT; so hat man:

$$\operatorname{tang} M'MR = \operatorname{tang}(PTM + MM'Q) = \frac{p - P}{1 + pP}, \text{ und:}$$

$$\operatorname{tang} AMT = \operatorname{tang}(PAM - PTM) = \frac{\frac{y}{x} - p}{1 + \frac{y}{x}p} = \frac{y - px}{x + py};$$

Hiernach steht als erste Bedingungsgleichung:

$$\frac{y - px}{x + py} = \frac{p - P}{1 + pP} \quad \ldots (1).$$

Eine ähnliche mit den Dreiecken $CM'T'$ und $AM'T'$ angestellte Betrachtung gibt:

$$\operatorname{tang} MM'R = -\operatorname{tang}(P'T'M' + MM'Q) = -\frac{p' - P}{1 + p'P}, \text{ und:}$$

$$\operatorname{tang} AM'V = \operatorname{tang}(P'AM' + P'T'M') = \frac{-\frac{y'}{x'} + p'}{1 + \frac{y'}{x'}p'} = -\frac{y' - p'x'}{x' + p'y'};$$

mithin hat man als zweite Bedingungsgleichung:

$$\frac{y'-p'x'}{x'+p'y'}=\frac{p'-P}{1+p'P} \ldots (2)$$

Suchen wir den Werth von P aus diesen beiden Gleichungen, so finden wir:

$$P=\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x} \ldots (3),$$

$$P=\frac{y'-2p'x'-p'^2q'}{p'^2x'-2p'y'-x'} \ldots (4),$$

was uns die Gleichung:

$$\frac{y'-2p'x'-p'^2y'}{p'^2x'-2p'y'-x'}-\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}=0 \ldots (5),$$

gibt. Es folgt daraus, daß die Funktion $\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}$, bei dem Uebergang von x in x' unverändert bleibt.

Unter einer solchen Voraussetzung muß also die Gleichung (3), welche dann der Gleichung $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$Const. entspricht, integrirt werden.

Man erhält auf diese Art:

$$y=x \times \text{Const.} + \varphi\,(\text{Const.}), \text{ oder}$$

$$y=x\left(\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right)+\varphi\left(\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}\right),$$

wo φ eine willkührliche Funktion darstellt. Bringt man den Ausdruck $\frac{y-2px-p^2y}{p^2x-2py-x}$ auf die Form:

$$-\frac{\frac{y-px}{x+py}-p}{1+p\left(\frac{y-px}{y+py}\right)}, \text{ und bemerkt, daß:}$$

$$\text{tang PTM}=p, \text{ tang AMT}=\frac{y-px}{x+py};$$

so verwandelt sich derselbe in:

$$-\text{tang}\,(\text{AMT}-\text{PTM}),$$

was uns lehrt, daß die Differenz der Winkel AMT und PTM, bei dem Uebergang von dem Punkte M zu dem Punkte M' unverändert bleibt.

Nimmt man in den Gleichungen (3) und (5) x unendlich an, während y, p und P endlich bleiben, was den Punkt A in die Unendlichkeit versetzt; so hat man:

$$P = -\frac{2p}{p^2-1} \text{ und } \frac{2p'}{p'^2-1} - \frac{2p}{p^2-1} = 0, \text{ woraus:}$$

$$y = -\frac{2px}{p^2-1} + \varphi\left(\frac{2p}{p^2-1}\right). \text{ Macht man:}$$

$$\varphi\left(\frac{2p}{p^2-1}\right) = 0, \text{ so entsteht } y = -\frac{2px}{p^2-1}, \text{ oder:}$$

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2+y^2)}} = dx.$$

Indem man integrirt, findet man $y^2 = 2cx + c^2$, welche Gleichung der Parabel angehört.

Anmerkung. Nach dem Gesetze der Reflexion des Lichts würde der vom Punkt A in der Richtung AM ausfahrende Lichtstrahl zweimal durch die gesuchte Curve, nämlich das erstemal von M nach M′, das zweitemal von M′ nach A reflectirt werden, mithin zu dem Punkte, von welchem er ausgegangen ist, zurückkehren.

§. 125. Die Curve anzugeben, bei welcher das Quadrat der Normale MR (Fig. 15) das Quadrat der in ihrem Durchschnittspunkte R errichteten Ordinate RN um eine constante Größe a übertrifft. Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes M durch x und y und die Gleichung der Curve durch $y = fx$, wo f eine unbekannte Funktion darstellt; so ist das Quadrat der Normale $MR = y^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)$ und die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der Abscissenachse $= x + \frac{ydy}{dx}$. Es ergibt sich hiernach für die aufzufindende Curve die Gleichung:

$$y^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \left[f\left(x + \frac{ydy}{dx}\right)\right]^2 + a.$$

In dieser Differenzengleichung erscheint $\frac{ydy}{dx}$, als die Differenz von x.

Um dieselbe auf die Einheit zu reduciren, machen wir wieder, wie es in der Note XII gesagt worden:

$$x = \varphi z \text{ und } x + \frac{y\,dy}{dx} = \varphi(z+1);$$

setzen ferner $fx = f(\varphi z) = \psi z$, also $f\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = \psi(z+1)$.

Wir erhalten auf diese Weise, wenn der Kürze halber φ statt φz, ψ statt ψz, φ_1 statt $\varphi(z+1)$, ψ_1 statt $\psi(z+1)$ geschrieben wird, die Gleichungen:

$$\psi^2 + \frac{\psi^2 d\psi^2}{d\varphi^2} = \psi^2_1 + a,$$

$$\psi + \frac{\psi d\psi}{d\varphi} = \varphi_1,$$

in denen drei veränderlichen Größen z, φ und ψ vorkommen.

Um eine derselben, nämlich ψ fortzuschaffen, substituire man das Resultat $\frac{\psi d\psi}{d\varphi} = \varphi_1 - \varphi$ aus der zweiten in die erstere; man erhält dadurch:

$$\psi^2 + (\varphi_1 - \varphi)^2 = \psi^2_1 + a,$$

und wenn man diese Gleichung differentiirt:

$$\psi_1 d\psi_1 - \psi d\psi = (\varphi_1 - \varphi)(d\varphi_1 - d\varphi)$$

Bezeichnet man die Funktion $\varphi(z+2)$ durch φ_2, so hat man offenbar $\frac{\psi_1 d\psi_1}{d\varphi_1} = \varphi_2 - \varphi_1$; folglich

$$\psi_1 d\psi_1 - \psi d\psi = (\varphi_2 - \varphi_1)d\varphi_1 - (\varphi_1 - \varphi)d\varphi.$$

Indem man diese Gleichung mit der obigen Differentialgleichung verbindet, erhält man:

$(\varphi_1 - \varphi)d\varphi_1 = (\varphi_2 - \varphi_1)d\varphi$, oder $(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi)d\varphi_1 = 0$, das ist:

$$\Delta^2\varphi \cdot d\varphi_1 = 0,$$

welche Gleichung in die beiden:

$$d\varphi_1 = 0 \text{ und } \Delta^2\varphi = 0 \text{ zerfällt.}$$

Die erstere gibt $\varphi_1 =$ Constante und ist augenscheinlich in der zweiten mit enthalten. Wir brauchen uns deshalb nur mit dieser letztern zu beschäftigen. Dieselbe liefert uns bei der Integration

$$\varphi = Az + B,$$

wo A und B Funktionen von $\sin 2\pi z$ und $\cos 2\pi z$ darstellen, die sich bei dem Uebergange von z in z+1 nicht ändern. Es ist folglich:

$$\frac{\psi d\psi}{d\varphi}=\varphi_1-\varphi=A\text{, wodurch die Gleichung:}$$

$$\psi^2+\frac{\psi^2 d\psi^2}{d\varphi^2}=\psi_1^2+a \text{ in:}$$

$$\psi_1^2-\psi^2=A^2-a \text{ oder } \Delta\psi^2=A^2-a \text{ übergeht.}$$

Hieraus entspringt durch Integration:

$$\psi^2=(A^2-a)z+C,$$

wo C ebenfalls eine Funktion von $\sin 2\pi z$ und $\cos 2\pi z$, aber von A und B nicht unabhängig ist. Denn differentiiren wir die Ausdrücke für ψ und φ, so bekommen wir:

$$2\frac{\psi d\psi}{dz}=A^2-a+2Az\frac{dA}{dz}+\frac{dC}{dz},$$

$$\frac{d\varphi}{dz}=A+z\frac{dA}{dz}+\frac{dB}{dz}.$$

Indem wir diese Resultate in die Gleichung:

$$\frac{\psi d\psi}{d\varphi}=A \text{ oder } \frac{\psi d\psi}{dz}=A\frac{d\varphi}{dz} \text{ einführen, haben wir:}$$

$$\frac{dC}{dz}-a=A^2+2A\frac{dB}{dz}\text{, oder}$$

$$A=-\frac{dB}{dz}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{dB}{dz}\right)^2+\frac{dC}{dz}-a\right]},$$

woraus der zwischen A, B und C stattfindende Zusammenhang erhellet. Setzen wir wieder x statt φ und y statt ψ, so erhalten wir die zwei Gleichungen:

$$x=B-\left\{\frac{dB}{dz}-\sqrt{\left[\left(\frac{dB}{dz}\right)^2+\frac{dC}{dz}-a\right]}\right\}\cdot z,$$

$$y^2=C+z\left\{2\left(\frac{dB}{dz}\right)^2+\frac{dC}{dz}-2a-2\frac{dB}{dz}\sqrt{\left[\left(\frac{dB}{dz}\right)^2+\frac{dC}{dz}-a\right]}\right\},$$

welche, sobald die willkührlichen Funktionen B und C particularisirt sind, nach bewerkstelligter Elimination von z die Gleichung

einer Curve darbietet, die die verlangte Eigenschaft besitzt. Machen wir jene Funktionen constant, so entsteht:

$$x=B+z\sqrt{-a},\ y^2=C^2-2az;\ \text{folglich:}$$
$$y^2=C-2B\sqrt{-a}+2x\sqrt{-a},$$

die Gleichung einer Parabel, welche nur reell wird, wenn a negativ ist.

Noten zur Variations- und Differenzenrechnung.

Note I zu §. 16.

Das unterscheidende Merkmal des Maximum's und Minimum's betreffend.

1. Die in dem Variationscalcül am häufigsten vorkommende Frage, ob ein vorgelegter Ausdruck ein Größtes oder Kleinstes werden kann oder nicht, ist nur nach vorhergegangener Ausmittelung des Kennzeichens, ob das Aggregat der mit den zweiten Potenzen der Variationen δy, δp, δq . . . behafteten Glieder positiv oder negativ ist, oder weder als positiv noch als negativ gelten kann, als völlig entschieden zu betrachten.

Diese zweite Frage kommt wieder darauf zurück, die Bedingungen aufzufinden, unter denen eine Funktion von der Form:

$$At^2+Btu+Cu^2+Dtz+Euz+Fz^2+Gtw+Huw+Izw+Kw^2+\ldots,$$

wo A, B, C . . . gegebene, t, u, z . . . aber unbestimmte, von einander unabhängige, reelle Größen darstellen, stets positiv oder negativ wird, welche Werthe auch t, u, z . . . haben mögen. Wir denken uns zu diesem Behuf unsere Funktion auf die Form:

$$f(t+\alpha u+\beta z+\gamma w+\ldots)^2+g(u+\beta' z+\gamma' w\ldots)^2+h(z+\gamma'' w+\ldots)^2+ \text{rc.}$$

gebracht. Bei der vergleichenden Zusammenhaltung dieser Ausdrücke ergibt sich:

$$f=A,\ \alpha=\frac{B}{2f},\ g=C-\frac{B^2}{4f},\ \beta=\frac{D}{2f},$$

$$\beta' = \frac{E - \frac{BD}{2f}}{2g},\ h = F - \frac{D^2}{4f} - \frac{\left(E - \frac{BD}{2f}\right)^2}{4g},\ \gamma = \frac{G}{2f},$$

$$\gamma' = \frac{H - \frac{BG}{2f}}{2g},\ \gamma'' = \frac{I - \frac{DG}{2f} - \frac{\left(E - \frac{BD}{2f}\right)\left(H - \frac{BG}{2f}\right)}{2g}}{2h}\ \text{u. s. w.}$$

Unser Ausdruck wird nun offenbar, unabhängig von $t, u, z \ldots$, stets positiv oder negativ sein, wenn von den Größen $f, g, h \ldots$ eine positiv oder negativ ist, und eine jede der übrigen im erstern Fall nicht < 0, und im zweiten nicht > 0 wird.

2. Lassen wir nun in $V = F(x, y, p \ldots)$, wo F eine beliebige Funktion darstellt, y und p in $y + \delta y$ und $p + \delta p$ übergehen; so haben wir:

$$V + \frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dp}\delta p + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p + \frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2\right) + \text{ꝛc.},$$

wo die Aggregate der mit den ersten, zweiten u. s. w. Potenzen der Variationen δy, δp behafteten Glieder bezüglich der erste, zweite u. s. w. Variationstheil heißen und mit δV, $\delta^2 V \ldots$ bezeichnet werden sollen.

Will man jetzt diejenigen Funktionen für $y, p, q \ldots$ in x bestimmen, welche für denselben Werth von x den Ausdruck:

$$V = F(x, y, p, q \ldots),$$

zu einem Maximum oder Minimum machen; so muß der zweite Variationstheil, nämlich:

$$\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p + \frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2 + 2\frac{d^2V}{dydq}\delta y\delta q + 2\frac{d^2V}{dpdq}\delta p\delta q$$
$$+ \frac{d^2V}{dq^2}\delta q^2 + \text{ꝛc.},$$

unabhängig von den Variationen $\delta y, \delta p, \delta q \ldots$ im erstern Fall stets negativ, im zweiten dagegen stets positiv sein. Indem man die vorhin gefundenen Resultate auf diesen Ausdruck anwendet, hat man $\frac{d^2V}{dy^2} < 0$ für das Maximum, und > 0 für das Minimum, und zugleich:

$$\frac{d^2V}{dy^2} \cdot \frac{d^2V}{dp^2} - \left(\frac{d^2V}{dydp}\right)^2 \text{ nicht } < 0,$$

$$\left\{\frac{d^2V}{dy^2}\cdot\frac{d^2V}{dp^2}-\left(\frac{d^2V}{dydp}\right)^2\right\}\left\{\frac{d^2V}{dy^2}\cdot\frac{d^2V}{dq^2}-\left(\frac{d^2V}{dydq}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\frac{d^2V}{dy^2}\cdot\frac{d^2V}{dpdq}-\frac{d^2V}{dydp}\cdot\frac{d^2V}{dydq}\right\}^2 \text{ nicht } <0; \text{ u. s. w.},$$

sowohl für das Maximum als das Minimum, insofern x denselben Werth behält.

3. Wir gehen jetzt zu dem Fall über, in welchem das von $x = x_{,}$ bis $x = x_{,,}$ ausgedehnte Integral $\int V dx$, wobei V eine aus den Veränderlichen x, y und den Differentialcoefficienten p, q . . . gebildeter Ausdruck ist, ein Maximum oder Minimum werden soll, indem man x nicht variiren läßt. Um mit dem einfachern Fall anzuheben, wollen wir annehmen, daß in V nur der erste Differentialcoefficient p vorkomme. Unter solchen Voraussetzungen muß dann der Ausdruck:

$$\int_{x_{,}}^{x_{,,}} dx \left\{\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p + \frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2\right\},$$

unabhängig von den Variationen δy, $\delta p < 0$ für das Maximum, und >0 fur das Minimum sein. Nun ist aber das Zeichen des Werthes eines Integrals innerhalb gegebener Grenzen mit dem Zeichen des Differentialcoefficienten übereinstimmend, insofern derselbe zwischen gedachtem Intervall weder sein Zeichen ändert, noch unendlich wird. Sind daher die Funktionen:

$$\frac{d^2V}{dy^2},\quad \frac{d^2V}{dydp},\quad \frac{d^2V}{dp^2}$$

von solcher Beschaffenheit, daß sie für alle zwischen $x_{,}$ und $x_{,,}$ liegenden Werthe von x unsern obigen in dieser Beziehung aufgestellten Bedingungen Genüge thun; so ist die Frage entschieden. Findet jedoch dies nicht statt, so muß man suchen, die Funktion:

$$\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p + \frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2$$

in zwei Theile zu zerlegen, von denen der eine integrabel sei, der andere dagegen, innerhalb der gegebenen Grenzen, sein Zeichen unverändert beibehalte. Einige Ueberlegung zeigt uns bald, daß die hier in Rede stehende ursprüngliche Funktion nur von der Form $\alpha + \beta\delta y^2$ sein kann; wir setzen daher:

$$\int dx \left\{\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2 + 2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p + \frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2\right\} =$$
$$\alpha + \beta\delta y^2 + \int dx\,[M\delta y^2 + N\delta y\delta p + P\delta p^2].$$

Indem wir diese Gleichung differentiiren und die gleichartigen Glieder zusammenstellen, erhalten wir:

$$\frac{d\alpha}{dx}=0,\ \frac{d^2V}{dy^2}=\frac{d\beta}{dx}+M,\ 2\frac{d^2V}{dydp}=N+2\beta,\ \frac{d^2V}{dp^2}=P.$$

Hieraus ergibt sich, $\alpha=C$, wo C eine willkührliche Constante darstellt, ferner:

$$M=\frac{d^2V}{dy^2}-\frac{d\beta}{dx},\ N=2\frac{d^2V}{dydp}-2\beta,\ P=\frac{d^2V}{dp^2}.$$

Da die Größe β beliebig ist, so kann man dergestalt über sie verfügen, daß die Größe $M\delta y^2+N\delta y\delta p+P\delta p^2$ für alle Werthe von $x=x_,$ bis $x=x_{,,}$, unabhängig von δy und δp, positiv oder negativ werde, was die Bedingung:

$$\left(\frac{d^2V}{dy^2}-\frac{d\beta}{dx}\right)\frac{d^2V}{dp^2}-\left(2\frac{d^2V}{dyd\beta}-2\beta\right)^2 \text{ nicht } <0 \text{ mit sich führt.}$$

Wird dieselbe erfüllt, so ist $\int_{x_,}^{x_{,,}} Vdx$ ein Maximum oder Minimum, wenn für alle Werthe von $x=x_,$ bis $x=x_{,,}$ die Größe $\frac{d^2V}{dp^2}<0$ oder >0 wird, insofern M, N, P für jene von x nicht unendlich werden.

Der von dem Integrationszeichen befreite Theil $\alpha+\beta\delta y_,^2$ welcher an den Grenzen sich in $\beta_{,,}\delta y^2_{,,}-\beta_,\delta y_,^2$ verwandelt, wo die unten angehängten Accente andeuten, daß $x_,$ und $x_{,,}$ an die Stelle von x zu setzen ist, muß Null oder von einerlei Vorzeichen mit $\frac{d^2V}{dp^2}$ sein; die in dem Werthe von β enthaltene willkührliche Constante wird man nach Maßgabe des jedesmaligen Werthes von δy^2 in der Weise bestimmen, um die eine oder die andere jener Bedingungen zu erfüllen.

4. Betrachten wir noch den Fall, in welchem V den ersten und zweiten Differialcoefficienten p und q enthalte. Der zweite Variationstheil ist hier:

$$\int dx\left(\frac{d^2V}{dy^2}\delta y^2+\frac{d^2V}{dp^2}\delta p^2+\frac{d^2V}{dq^2}\delta q^2+2\frac{d^2V}{dydp}\delta y\delta p\right.$$
$$\left.+2\frac{d^2V}{dydq}\delta y\delta q+2\frac{d^2V}{dpdq}\delta p\delta q\right), \text{ welches wir }=$$
$$\alpha+\beta\delta y^2+\gamma\delta y\delta p+\varepsilon\delta p^2+\int dx(M\delta y^2+N\delta y\delta p$$
$$+P\delta p^2+Q\delta y\delta q+R\delta p\delta q+S\delta q^2)$$

setzen, da man bald findet, daß der vom Integrationszeichen befreite Theil die Form: $\alpha+\beta\delta y^2+\gamma\delta y\delta p+\varepsilon\delta p^2$ hat.

Bei der Differentiation und der vergleichenden Zusammenstellung der Glieder bekommen wir:

$$\frac{d\alpha}{dx}=0,\quad \frac{d\beta}{dx}+M=\frac{d^2V}{dy^2},\quad 2\beta+\frac{d\gamma}{dx}+N=2\frac{d^2V}{dydp},$$

$$\gamma+\frac{d\varepsilon}{dx}+P=\frac{d^2V}{dp^2},\quad \gamma+Q=2\frac{d^2V}{dydq},\quad 2\varepsilon+R=2\frac{d^2V}{dpdq},\quad S=\frac{d^2V}{dq^2}.$$

Hieraus folgt $\alpha=c$, ferner:

$$M=\frac{d^2V}{dy^2}-\frac{d\beta}{dx},\quad N=2\frac{d^2V}{dydp}-2\beta-\frac{d\gamma}{dx},\quad P=\frac{d^2V}{dp^2}-\gamma-\frac{d\varepsilon}{dx},$$

$$Q=2\frac{d^2V}{dydq}-\gamma,\quad R=2\frac{d^2V}{dpdq}-2\varepsilon,\quad S=\frac{d^2V}{dq^2}.$$

Da β, γ, ε beliebig sind, so wähle man sie dergestalt, daß die Größen M, N, P . . . die Bedingungen erfüllen, unter denen der Ausdruck: $M\delta y^2+N\delta y\delta p+P\delta p^2+Q\delta y\delta q+R\delta p\delta q+S\delta q^2$ für alle Werthe von $x=x_,$ bis $x=x_{,,}$, unabhängig von den Variationen δy, δp, δq positiv oder negativ ausfalle. Setzen wir $\delta y=z$, $\delta p=u$, $\delta q=t$, so geht der letzte Ausdruck in:

$$St^2+Rtu+Pu^2+Qzt+Nzu+Mz^2$$ über,

in welcher Gestalt derselbe mit dem Ausdrucke:

$$At^2+Btu+Ctu^2++Dtz+Euz+Fz^2$$

zusammengehalten, uns folgende Gleichung liefert, nämlich:

$$f=S,\quad g=P-\frac{R^2}{4f},\quad h=M-\frac{Q^2}{4g}-\frac{\left(N-\frac{QR}{2f}\right)^2}{4g},$$

oder, wenn die für M, N, P . . . gefundenen Werthe eingeführt werden:

$$f=\frac{d^2V}{dq^2},\quad g=\frac{d^2V}{dp^2}-\gamma-\frac{d\varepsilon}{dx}-\frac{\left(\frac{d^2V}{dydp}-\varepsilon\right)^2}{f},$$

$$h=\frac{d^2V}{dy^2}-\frac{d\beta}{dx}-\frac{\left(2\frac{d^2V}{dydq}-\gamma\right)^2}{4f}$$

$$-\frac{\left\{2\frac{d^2V}{dydp}-2\beta-\frac{d\gamma}{dx}-\frac{\left(2\frac{d^2V}{dydq}-\gamma\right)\left(\frac{d^2V}{dpdq}-\varepsilon\right)}{f}\right\}^2}{4g}.$$

Damit nun M, N, P . . . die verlangten Bedingungen erfüllen, muß für alle Werthe von $x=x_,$ bis $x=x_{,,}$ die Größe $\frac{d^2V}{dq^2}<0$ für

das Maximum, und >0 für das Minimum, und zugleich g und h nicht $>$ oder <0 sein. Ueber die beliebigen Größen β, γ, ε und die durch dieselben mittelst Integration eingeführten Constanten verfüge man dergestalt, daß der von dem Integrationszeichen befreite Theil:

$$\alpha + \beta\delta y^2 + \gamma\delta y\delta p + \varepsilon\delta p^2,$$

welcher an den Grenzen in:

$$\beta_{\prime\prime}\delta y_{\prime\prime}^2 + \gamma_{\prime\prime}\delta y_{\prime\prime}\delta p_{\prime\prime} + \varepsilon_{\prime\prime}\delta p_{\prime\prime}^2 - \beta_{\prime}\delta y_{\prime}^2 - \gamma_{\prime}\delta y_{\prime}\delta p_{\prime} \quad \varepsilon_{\prime}\delta p_{\prime}^2$$

übergeht, verschwinde oder mit dem unter dem Integralzeichen befindlichen Antheil ein und dasselbe Vorzeichen erhalte.

Daß auch auf die Fälle, in denen V noch höhere Differentialcoefficienten als den zweiten enthält, die hier angegebene Methode sich ausdehnen läßt, sieht man wohl bald ein; nur wird öfters ihre Anwendung mit bedeutenden Schwierigkeiten verbunden sein, welche unter Umständen bis jetzt gar nicht beseitigt werden können.

Note II zu §. 16.

Einige Beispiele über die Bestimmung des Maximum's und Minimum's.

1. Eine Relation zwischen x und y zu finden, für welche das Integral:

$$U = \int (15a^2x^2y - 15ax^3y + 5a^2y^3 - 3y^5)dx,$$

innerhalb gegebener Grenzen, ein Maximum oder ein Minimum werde. Der erste Variationstheil ist:

$$\delta U = \int dx\,(15a^2x^2 - 15a^3x + 15a^2y^2 - 15y^4)\delta y,$$

woraus die Bedingungsgleichung des Maximum's und Minimum's:

$$15a^2x^2 - 15a^3x + 15a^2y^2 - 15y^4 = 0$$

entspringt. Dieselbe gibt uns:

$$y = \pm\sqrt{ax} \text{ und } y = \pm\sqrt{[a(a-x)]}.$$

Der zweite Variationstheil $\delta^2 U$ ist $= \int dx\cdot 30y(a^2 - 2y^2)\delta y^2$ und geht für die beiden ersten Werthe von y in:

$$\int \pm 30\sqrt{ax}\cdot(a^2 - 2ax)\,dx\cdot\delta y^2 \text{ über.}$$

Da nun diese Größe, im Fall daß a positiv ist, von $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}a$ beständig positiv und von $x=\frac{1}{2}a$ bis $x=\infty$ beständig negativ wird, so hat man einerseits von $x=0$ bis $x=\frac{1}{2}a$ für die positive Wurzel ein Minimum und für die negative Wurzel ein Maximum, und andererseits von $x=\frac{1}{2}a$ bis $x=\infty$ für die positive Wurzel ein Maximum, und für die negative Wurzel ein Minimum.

Für die beiden andern Werthe von y geht δU in:

$$\int \pm 30(2ax - a^2)\sqrt{[a[a-x)]}\,dx\cdot\delta y^2 \text{ über,}$$

welche Größe von $x = -\infty$ bis $x = +\frac{1}{2}a$ negativ für die positive Wurzel und positiv für die negative Wurzel, dagegen von $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = a$ positiv für die positive Wurzel, und negativ für die negative Wurzel ist. Es besteht daher für die positive Wurzel von $x = -\infty$ bis $x = \frac{1}{2}a$ ein Maximum, und von $x = \frac{1}{2}a$ bis $x = a$ ein Minimum. Das Umgekehrte findet für die negative Wurzel statt.

2. Die Funktion y von x zu finden, welche das bestimmte Integral $\int_{x_{,}}^{x_{,,}} (y^2 + 2py + p^2)\, dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht. Wir nehmen die Grenzen als fest an, was uns der Mühe überhebt, die Grenzengleichung zu berücksichtigen. Als Gleichung des Maximum's oder Minimum's erhalten wir:

$$y - \frac{dp}{dx} = 0 \text{ oder } y - \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

woraus durch Integration entspringt: $y = c\varepsilon^x + c'\varepsilon^{-x}$, wo c und c' willkührliche Constanten bedeuten. Der zweite Variationstheil ist hier:

$$\int (\delta y^2 + 2\delta y \delta p + \delta p^2) dx = \int (\delta y + \delta p)^2 dx,$$

woran man sogleich erkennt, daß ein Minimum stattfindet.

3. Die Funktion y von x zu finden, welche das bestimmte Integral $\int_{x_{,}}^{x_{,,}} (y^2 + 2yp - p^2) dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht. Die Bedingungsgleichung des Maximum's oder Minimum's $y + \frac{dp}{dx} = 0$ liefert uns bei der Integration $y = C \sin(x + c')$, wo C und c' willkührliche Constanten sind. Der zweite Variationstheil wird hier: $\int dx(\delta y^2 + 2\delta y \delta p - \delta p^2)$, welchen wir gleich: $\beta \delta y^2 - \int (\delta p + \gamma \delta y)^2 dx$ setzen, wo β und γ noch zu bestimmende Funktionen von x sind.

Indem wir die Gleichung:

$$\int (\delta y^2 + 2\delta y \delta p - \delta p^2) dx = \beta \delta y^2 - \int (\delta p + \gamma \delta y)^2 dx$$

differentiiren und die gleichartigen Glieder zusammenhalten, bekommen wir:

$$1 = \frac{d\beta}{dx} - \gamma^2, \quad \beta - \gamma = 1.$$

Daraus ergibt sich: $\beta = 1 + \operatorname{tang}(x + c)$ und $\gamma = \operatorname{tang}(x + c)$.

Es ist folglich der zweite Variationstheil:

$$\int_{x_{,}}^{x_{,,}} (\delta y^2 + 2\delta y \delta p - \delta p^2) dx = [1 + \operatorname{tg}(x_{,,} + c)]\delta y_{,,}^2 - [1 + \operatorname{tg}(x_{,} + c)]\delta y_{,}^2$$
$$- \int_{x_{,}}^{x_{,,}} (\delta p + \operatorname{tg}(x + c) \cdot \delta y)^2 dx,$$

oder, wenn wir die Grenzen als fest ansehen:

$$\int_{x_{\prime\prime}}^{x_\prime}(\delta y^2+2\delta y\delta p-\delta p^2)\,dx=-\int_{x_\prime}^{x_{\prime\prime}}[\delta p+tg(x+c)\cdot\delta y)^2dx,$$

woran man sieht, daß ein Maximum statt hat.

4. Die Relation zwischen x und y zu finden, für welche das Integral $\int_{x_\prime}^{x_{\prime\prime}} yxdx$ einerlei Werth A behält, und das Integral $\int_{x_\prime}^{x_{\prime\prime}} y^2dx$ ein Maximum oder Minimum wird.

Wenn a einen unbestimmten Coefficienten darstellt und:

$$V=\int y^2dx+a\int yxdx$$

gesetzt wird, so haben wir hier für den ersten Variationstheil:

$$\delta V=\int dx\,(2y+ax)\,\delta y.$$

Hieraus entspringt die Gleichung des Maximum's oder Minimum's:

$$2y+ax=0 \text{ oder } y=-\frac{a}{2}x.$$

Zur Bestimmung von a hat man die Relation:

$$\int_{x_\prime}^{x_{\prime\prime}}-\frac{a}{2}x^2dx=A,$$ woraus sich ergibt:

$$a=\frac{6A}{x_\prime^3-x_{\prime\prime}^3}.$$ — Der zweite Variationstheil $\delta^2V=\int 2\delta y^2\cdot dx$ zeigt ein Minimum an.

Note III zu §. 19.

Einige Bemerkungen zu den allgemeinen Bedingungsgleichungen des Maximum's und Minimum's.

1. Für die Variation des unbestimmten Integrals $\int Vdx$, wo V nur x, y und die Differentialcoefficienten von y enthält, haben wir den Ausdruck:

$$\delta\int Vdx=V\delta x+\left(P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\ldots\right)w$$
$$+\left(Q-\frac{dR}{dx}+\ldots\right)\frac{dw}{dx}+\ldots$$
$$+\int\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}\ldots\right)wdx,$$

welcher, wenn wir uns erinnern, daß:

$$w=\delta y-p\delta x,\ \frac{dw}{dx}=\delta p-q\delta x,\ \frac{d^2w}{dx^2}=\delta q-r\delta x\ \ldots \text{ ist,}$$

in $\delta\int V dx = \Big\{ V - p\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right)$

$-q\left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right) - r(R - \ldots) - \text{rc.}\Big\}\delta x.$

$+\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right)\delta y + \left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right)\delta p + (R - \ldots)\delta q + \ldots$

$+\int\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots\right) w dx$

übergeht. Soll nun $\int V dx$ innerhalb gegebener Grenzen ein Maximum oder Minimum werden, so haben wir:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} + \ldots = 0 \quad (A)$$

als allgemeine Bedingungsgleichung des Maximum's oder Minimum's.

Diese Differentialgleichung kann sich bis zur 2nten Ordnung erheben, wenn in V noch der nte Differentialcoefficient vorkommt; das daraus abgeleitete Integral wird daher im Allgemeinen 2n willkührliche Constanten enthalten.

2. Sind nun die beiden Grenzen des Integrals fest, so daß an denselben für $x_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,}$, $y_{,,}$ die Größen p, q . . . in $p_{,}$, $p_{,,}$, $q_{,}$, $q_{,,}$ . . . übergehen; so haben wir 2n Bedingungsgleichungen zur Bestimmung jener durch die Integration der allgemeinen Gleichung des Maximum's und Minimum's (A) eingeführten 2n willkührlichen Constanten.

3. Wenn die beiden Grenzen $x_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,}$, $y_{,,}$ gegeben, ohne daß für dieselben die Werthe von $p_{,}$, $p_{,,}$, $q_{,}$, $q_{,,}$ . . . bestimmt sind; so liefert uns die Grenzengleichung folgende 2n—2 Relationen, nämlich:

$$\left(Q_{,} - \frac{dR_{,}}{dx_{,}} + \ldots\right) = 0, \quad \left(Q_{,,} - \frac{dR_{,,}}{dx_{,,}} + \ldots\right) = 0,$$

$$\left(R_{,} - \frac{dS_{,}}{dx_{,}} + \ldots\right) = 0, \quad \left(R_{,,} - \frac{dS_{,,}}{dx_{,,}} + \ldots\right) = 0,$$

. . . . ,

indem die Variation des letzten Differentialcoefficienten bei dem von dem Integrationszeichen befreiten Theil von $\delta\int V dx$ fehlt, wie es die Form der Coefficienten von δp, δq . . . bald zu erkennen gibt. Denn kommen z. B. in V nur fünf Differentialcoefficienten p, q, r, s, t vor, so wird der von dem Integrationszeichen befreite Theil mit $T\delta s$ endigen und kein mit der Variation δt behaftetes Glied enthalten. Da aber an den Grenzen die Werthe $x = x_{,}$ und $x = x_{,,}$ uns $y = y_{,}$ und $y = y_{,,}$ geben, so

werden diese zwei neuen Relationen mit den oben erwähnten $2n-2$ Relationen verbunden um die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung der $2n$ willkührlichen Constanten liefern.

4. Sind einige von den Größen $p_{,}$, $p_{,,}$, $q_{,}$, $q_{,,}$ . . . . . gegeben, so wird man die Coefficienten der nicht gegebenen Variationen $\delta p_{,}$, $\delta p_{,,}$, $\delta q_{,}$, $\delta q_{,,}$ . . . gleich Null setzen. Die übrigen zur Bestimmung der $2n$ willkührlichen Constanten des Integrals von (A) werden in den Bedingungen enthalten sein, an welche die Größen $p_{,}$, $p_{,,}$, $q_{,}$, $q_{,,}$ . . . geknüpft sind.

5. Sind die Grenzen veränderlich und insoweit bestimmt, daß sie auf zwei gegebenen Curven liegen sollen; so haben wir im vorliegenden Falle $2n+4$ Unbekannte zu bestimmen, nämlich die $2n$ Constanten, welche die Integration der Gleichung (A) mit sich bringt und die vier Coordinaten $x_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,}$, $y_{,,}$ der Endpunkte der gesuchten Curve. Die Variationen $\delta x_{,}$, $\delta x_{,,}$, $\delta y_{,}$, $\delta y_{,,}$ sind nun nicht mehr Null, dagegen bestehen zwischen den Variationen der Abscissen und den zugehörigen Ordinaten ganz dieselben Relationen, welche zwischen ihren Differentialen in Bezug auf die gegebenen Curven stattfinden. Man wird also aus den diesen beiden Curven zukommenden Gleichungen die Variationen $\delta x_{,}$ und $\delta x_{,,}$ in $\delta y_{,}$ und $\delta y_{,,}$ ausdrücken und gedachte Werthe in dem von dem Integralzeichen befreiten Antheil von $\delta\int V dx$ einführen und jeden einzelnen Coefficienten der darin noch vorkommenden $2n$ Variationen $\delta y_{,}$, $\delta y_{,,}$, $\delta p_{,}$, $\delta p_{,,}$ . . . gleich Null setzen. Die Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,,}$ müssen hierauf sowohl den beiden gegebenen Curven, als auch der gefundenen Curve Genüge thun, was uns vier Bedingungsgleichungen gibt: wir hätten also im Ganzen $2n+4$ Bedingungsgleichungen zur Bestimmung unserer $2n+4$ Unbekannten.

6. Kommt in V kein y vor, so ist $N=0$ und die Gleichung (A) reducirt sich auf:

$$\frac{dP}{dx}-\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^3R}{dx^3}-\ldots=0,$$

woraus durch Integration folgende Differentialgleichung von der $(2n-1)$ten Ordnung entspringt:

$$P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}\ldots=C\;\ldots\;(B).$$

Fehlte überdies in V noch p, so würde man ähnlicherweise zu einer Differentialgleichung von der $(2n-2)$ten Ordnung gelangen u. s. w.

7. Enthält V kein x, d. h. ist $V = F(y, p, q\ldots)$; so hat man $\frac{dV}{dx} = Np + Pq + Qr + \ldots$ Indem man darin statt N seinen aus (A) hergeleiteten Werth substituirt, welcher

$$= \frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^3R}{dx^3} - \ldots$$ ist, bekommt man:

$$\frac{dV}{dx} = Pq + Qr + Rs \ldots + p\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} + p\frac{d^3R}{dx^3} - \ldots,$$

oder, wenn man das Ganze mit dx multiplicirt und berücksichtigt, daß

$$qdx = dp,\ rdx = dq,\ sdx = dr \ldots$$ ist:

$$\frac{dV}{dx}dx = Pdp + Qdq + Rdr + \ldots + p\frac{dP}{dx}dx - p\frac{d^2Q}{dx^2}dx + p\frac{d^3R}{dx^3}dx - \text{ꝛc.}$$

folglich:

$$V = \int Pdp + \int Qdq + \int Rdr + \ldots \int p\frac{dP}{dx}dx - \int p\frac{d^2Q}{dx^2}dx + \int p\frac{d\ R}{dx^3}dx - \text{ꝛc.}$$

Die theilweise Integration gibt aber:

$$\int Pdp = Pp - \int p\frac{dP}{dx}dx,$$

$$\int Qdq = Qq - p\frac{dQ}{dx} + \int p\frac{d^2Q}{dx^2}dx,$$

$$\int Rdr = Qr - q\frac{dR}{dx} + p\frac{d^2R}{dx^2} - \int p\frac{d^3R}{dx^3}dx,$$

. . . .

Mit Hülfe dieser Formeln erhält man die Differentialgleichung:

$$V = p\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} - \ldots\right) + q\left(Q - \frac{dR}{dx} + \ldots\right)$$
$$+ r(R\ldots) + \ldots + C\ (D),$$

welche nur von der (2n—1)ten Ordnung ist.

8. Kommt in V weder x noch y vor, d. h. ist: $\frac{dV}{dx} = Pq + Qr + Rs + \text{ꝛc.}$, so reducirt sich die Gleichung (A) auf:

$$\frac{dP}{dx} - \frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{d^3Q}{dx^3} - \ldots = 0;$$

woraus durch Integration:

$$P = \frac{dQ}{dx} - \frac{d^2R}{dx^2} + \text{ꝛc.} + C.$$

Durch Substitution dieses Werthes in den obigen Ausdruck erhält man:

$$\frac{dV}{dx} = Qr + Rs + \ldots + q\frac{dQ}{dx} - q\frac{d^2R}{dx^2} + \ldots + Cq.$$

Indem man wieder mit dx multiplicirt und integrirt, hat man:

$$V = \int Qdq + \int Rdr + \ldots + \int q\frac{dQ}{dx}dx - \int q\frac{d^2R}{dx^2}dx + \ldots + Cp + c'.$$

Mittelst der theilweisen Integration haben wir aber gefunden:

$$\int Qdq = Qq - p\frac{dQ}{dx} + \int p\frac{d^2Q}{dx^2}dx,$$

$$\int Rdr = Rr - q\frac{dR}{dx} + p\frac{d^2R}{dx^2} - \int p\frac{d^3R}{dx^3}dx.$$

. . . . . .

Durch Substitution dieser Werthe ergibt sich folgende Differentialgleichung von der $(2n-2)$ten Ordnung:

$$V = q\left(Q - \frac{dR}{dx} + \frac{d^2S}{dx^2} - \ldots\right) + r\left(R - \frac{dS}{dx} + \ldots\right) + \ldots + cp + C' \ldots \quad (E).$$

Note IV zu §. 19.

Einige Aufgaben zur Erläuterung des in der vorhergehenden Note Gesagten.

1. Zwischen zwei gegebenen Punkten die Curve zu bestimmen, welche durch ihre Umdrehung um eine Gerade die kleinste Oberfläche beschreibt.

Wählt man diese Gerade als Achse der x, so muß das Integral $2\pi\int y dx\sqrt{(1+p^2)}$ ein Minimum werden, was uns $\delta\int y dx\sqrt{(1+p^2)}=0$ gibt. Es ist hier also:

$$V = y\sqrt{(1+p^2)},\ N = \sqrt{(1+p^2)},\ P = \frac{py}{\sqrt{(1+p^2)}},\ Q = R = S - \ldots = 0.$$

Da nun V kein x enthält, so kann man von der Gleichung (D) Gebrauch machen, welche ganz einfach $V = pP + c$ ist und durch Substitution in $\frac{y}{\sqrt{(1+p^2)}} = c$ übergeht. Aus der letztern Gleichung folgt $dx = \frac{cdy}{\sqrt{(y^2-c^2)}}$. Hieraus durch Integration $x = c\log[y+\sqrt{(y^2-c^2)}] + c'$, welches die Gleichung der gesuchten Curve ist und eine Kettenlinie darstellt.

Die beiden Constanten c, c′ müssen dergestalt bestimmt werden, daß diese Curve durch die beiden gegebenen Punkte geht. Nimmt man deshalb den Durchschnitt der Ordinate y, des erstern der gegebenen Punkte

mit der Abscissenachse zum Ursprung, so liefert uns, wenn $x_{,,}$ und $y_{,,}$ die Coordinaten des zweiten Grenzpunktes sind, die Aufgabe folgende zwei Gleichungen:

$$0 = c\log[y_{,}+\sqrt{(y_{,}^2-c^2)}]+c', \text{ und:}$$
$$x_{,,} = c\log[y_{,,}+\sqrt{(y_{,,}^2-c^2)}]+c', \text{ woraus:}$$
$$x_{,,} = c\log\frac{y_{,,}+\sqrt{(y_{,,}^2-c^2)}}{y_{,}+\sqrt{(y_{,}^2-c^2)}},$$

welche Gleichung zur annähernden Bestimmung von c zu verwenden ist.

2. Im Fall beide Grenzpunkte der gesuchten Curve auf zwei gleichseitigen Hyperbeln, welche

$$y_{,} = \frac{a^2}{x_{,}},\ y_{,,} = -\frac{b^2}{x_{,,}}$$

zu Gleichungen haben, liegen, sind:

$$\frac{y_{,,}\delta x_{,,}}{\sqrt{(1+p_{,,}^2)}} + \frac{p_{,,}y_{,,}}{\sqrt{(1+p_{,,}^2)}}\delta y_{,,} - \frac{y_{,}}{\sqrt{(1+p_{,}^2)}}\delta x_{,} - \frac{p_{,}y_{,}}{\sqrt{(1+p_{,}^2)}}\delta y_{,}$$

die von dem Integrationszeichen befreiten Glieder der Entwickelung von $\delta\int y dx\sqrt{(1+p^2)}$. Die Gleichungen der Hyperbeln geben aber:

$$\delta y_{,} = -\frac{a^2}{x_{,}^2}\delta x_{,},\ \delta y_{,,} = \frac{b^2}{x_{,,}^2}\delta x_{,,},$$

wodurch der vorhergehende Ausdruck in:

$$\frac{y_{,,}}{\sqrt{(1+p_{,,}^2)}}\left(1+\frac{b^2}{x_{,,}^2}p_{,,}\right)\delta x_{,,} - \frac{y_{,}}{\sqrt{(1+p_{,}^2)}}\left(1-\frac{a^2 p_{,}}{x_{,}^2}\right)\delta x_{,},$$

übergeht. Wir müssen also $1-\frac{a^2p_{,}}{x_{,}^2}=0$ und $1+\frac{b^2p_{,,}}{x_{,,}^2}=0$ setzen, was mit Berücksichtigung von:

$$\frac{-a^2}{x_{,}^2} = \frac{dy_{,}}{dx_{,}} \text{ und } \frac{b^2}{x_{,,}^2} = \frac{dy_{,,}}{dx_{,,}}$$

mit $1+p_{,}\frac{dy_{,}}{dx_{,}}=0$ und $1+p_{,,}\frac{dy_{,,}}{dx_{,,}}=0$ gleichlautend ist und aussagt, daß unsere Curve an den Grenzpunkten auf den beiden Hyperbeln senkrecht steht, wie es zu erwarten war. Setzen wir in den Gleichungen $1-\frac{a^2p_{,}}{x_{,}^2}=0$ und $1+\frac{b^2}{x_{,,}^2}p_{,,}=0$ statt $p_{,}$ und $p_{,,}$ deren Werthe $\frac{\sqrt{(y_{,}^2-c^2)}}{c}$ und $\frac{\sqrt{(y_{,,}^2-c^2)}}{c}$; so verwandeln sie sich in:

$$1-\frac{a^2}{x_{,}^2}\frac{\sqrt{(y_{,}^2-c^2)}}{c}=0, \text{ und } 1+\frac{b^2}{x_{,,}^2}\frac{\sqrt{(y_{,,}^2-c^2)}}{c}=0.$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit den vier folgenden, nämlich:

$$y_{,}=\frac{a^2}{x_{,}},\ y_{,,}=-\frac{b^2}{x_{,,}},$$

$$x_{,}=c\log[y_{,}+\sqrt{(y_{,}^2-c^2)}]+c' \text{ und } x_{,,}=c\log[y_{,,}+\sqrt{(y_{,,}^2-c^2)}]+c'$$

dienen zur Bestimmung der sechs Größen c, c', $x_{,}$, $x_{,,}$, $y_{,}$ und $y_{,,}$.

3. Handelt es sich darum, die Curve zu bestimmen, für welche das zwischen einem Bogen, den beiden äußersten Normalen und dem zugehörigen Bogen der Evolute enthaltene Flächenstück u ein Maximum wird; so haben wir $u=\int\frac{(1+p^2)^2}{2q}dx$. Die Bedingung des Maximums gibt uns $\delta\int\frac{(1+p^2)^2}{2q}dx=0$. Da hier:

$$V=\frac{(1+p^2)^2}{2q},\ P=p^2\frac{(1+p^2)}{q},\ Q=-\frac{(1+p^2)^2}{2q^2},\ R=S=\ldots=0 \text{ ist,}$$

und in V weder x noch y vorkommt; so können wir die Gleichung (E) benutzen, welche sich auf $V=qQ+Cp+C'$ reducirt und durch Substitution in $\frac{(1+p^2)^2}{q}=Cp+C'$ übergeht. Wir müssen jetzt diese Gleichung integriren und die vier willkührlichen Constanten bestimmen, was dadurch geschieht, daß man die gesuchte Curve, welche im Paragraphen 26 als eine Cycloide erkannt worden, durch die zwei Grenzpunkte gehen und an denselben $Q_{,}$ und $Q_{,,}$ verschwinden läßt.

4. Die kürzeste Linie zu finden, welche man zwischen zwei gegebenen Punkten auf einen geraden Cylinder vom Halbmesser a und dessen Achse mit der Achse der y zusammenfällt, ziehen kann. Die Gleichung der Cylinderfläche ist $z^2+x^2=a^2$, woraus $\frac{dz}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Die Länge des Bogens ist:

$$s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2+dz^2)}=\int dx\sqrt{\left(1+p^2+\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)}$$

$$=\int dx\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2\right)};$$

woraus die Bedingung des Maximum's liefert:

$$\delta\int dx\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2\right)}=0. \text{ Es ist hier also:}$$

$$V=\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2\right)},\ P=\frac{p}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2-x^2}+p^2\right)}}.$$

Weil y in V nicht vorkommt, nehmen wir sofort die Gleichung (B), welche im vorliegenden Fall $P = c$ oder $\frac{p}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{a^2 - x^2} + p^2\right)}} = c$ ist.

Aus dieser letztern Gleichung folgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sqrt{(1 - c^2)}} \cdot \frac{a}{\sqrt{(a^2 - x^2)}};$$

woraus endlich durch Integration sich ergibt:

$$y = ca \cdot \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{x}{a}\right) + c',$$

wo der unbestimmte Faktor $\frac{c}{\sqrt{(1-c^2)}}$ durch c ersetzt worden. — Die Coefficienten c und c' der Integration müssen den Bedingungen gemäß bestimmt werden, daß unsere Curve, welche eine Schraubenlinie ist, durch die zwei gegebenen Punkte geht.

Note V zu §. 45 und 46.

Ueber die Allgemeinheit der Formeln (A) und (B).

1. Die allgemeine Gültigkeit der Formel (A) läßt sich sehr leicht auf folgende Weise darthun. Entwickelt man nämlich den Ausdruck: $y_{n+1} = y_n + \Delta y_n$, so kommt:

$$y_{n+1} = y + \frac{n}{1} \Delta y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \text{etc.}$$

$$+ \Delta y + \frac{n}{1} \Delta^2 y + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \Delta^3 y + \text{etc., oder:}$$

$$y_{n+1} = y + (n+1)\Delta y + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} \Delta^2 y + \frac{(n+1)n(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 y + \text{etc.},$$

ein Resultat, welches auch unmittelbar aus der Formel (A) erhalten wird, wenn man darin $n+1$ statt n setzt. Da nun unsere Formel (A) für $n = 2, 3, 4$ wahr ist; so gilt sie auch für 5, für 6, überhaupt für jeden ganzen positiven Werth von n.

2. Durch Entwickelung des Ausdruckes:

$\Delta^{n+1} = \Delta^n y_1 - \Delta^n y$ erhält man:

$$\Delta^{n+1} y = y_{n+1} - \frac{n}{1} y_n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y_{n-1} - \text{etc.}$$

$$- y_n + \frac{n}{1} y_{n-1} - \text{etc.}$$

$$= y_{n+1} - \frac{n+1}{1} y_n + \frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} y_{n-1} - \text{etc.}$$

Da nun dasselbe Resultat aus der Formel (B) gewonnen wird, wenn man darin $n+1$ statt n setzt; so muß gedachte Formel für $n+1$ richtig sein, wenn sie für n gültig ist. Nun haben wir sie für $n=2$ und $n=3$ als richtig erkannt, folglich paßt sie auch für $n=4$, wie überhaupt für jeden ganzen positiven Werth von n.

Note VI zu §. 47.

Verschiedene Differenzreihen.

Die Formeln (A) und (B) sind nicht die einzigen, welche sich aus den Systemen der Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} y_1-y&=\Delta y\\ y_2-y_1&=\Delta y_1\\ &\dots\\ y_n-y_{n-1}&=\Delta y_{n-1};\end{aligned}\right\}(1)\qquad \left.\begin{aligned}\Delta y_1-\Delta y&=\Delta^2 y\\ \Delta y_2-\Delta y_1&=\Delta^2 y_1\\ &\dots\\ \Delta y_{n-1}-\Delta y_{n-2}&=\Delta^2 y_{n-2};\end{aligned}\right\}(2)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2 y_1-\Delta^2 y&=\Delta^3 y\\ \Delta^2 y_2-\Delta^2 y_1&=\Delta^3 y_1\\ &\dots\\ \Delta^2 y_{n-2}-\Delta^3 y_{n-3}&=\Delta^3 y_{n-3}\end{aligned}\right\}(3)$$

herleiten lassen. Indem diese Gleichungen auf die eine oder die andere Weise combinirt werden, führen sie zu verschiedenen Resultaten, von denen wir hier einige mittheilen wollen.

1. Wenn man sämmtliche Gleichungen (1) addirt und auf beiden Seiten die gemeinsamen Glieder wegläßt, erhält man:

$$y_n = y+\Delta y+\Delta y_1+\Delta y_2+\ \dots\ +\Delta y_{n-1}\quad (4).$$

Man sieht hieraus, daß jedes Glied als die Summe des ersten und der Zuwachse der successiven Glieder betrachtet werden kann.

2. Die Summe der Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_n &= y_{n-1}+\Delta y_{n-1},\\ \Delta y_{n-1}&=\Delta y_{n-2}+\Delta^2 y_{n-2},\\ \Delta^2 y_{n-2}&=\Delta^2 y_{n-3}+\Delta^3 y_{n-3},\\ &\dots\\ \Delta^{n-1}y_1&=\Delta^{n-1}y+\Delta^n y\end{aligned}$$

liefert nach geschehener Reduktion:

$$y_n = y_{n-1}+\Delta y_{n-2}+\Delta^2 y_{n-3}+\Delta^3 y_{n-4}\ldots+\Delta^{n-2}y_1+\Delta^{n-1}y+\Delta^n y\quad (5).$$

3. Nimmt man die erste Differenz von dieser Gleichung, so kommt:

$$\Delta y_n = \Delta y_{n-1} + \Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \text{ꝛc.} \quad (6).$$

Indem man von diesem Resultat abermals die Differenz nimmt und dies so weiter fortsetzt, erhält man, wenn jedesmal die Stellenzeiger um eine Einheit vermindert werden:

$$\Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \text{ꝛc.},$$
$$\Delta^3 y_{n-2} = \qquad \Delta^3 y_{n-3} + \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \text{ꝛc.},$$
$$\Delta^4 y_{n-3} = \qquad\qquad \Delta^4 y_{n-4} + \Delta^5 y_{n-5} + \text{ꝛc. u. s. w.}$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich, wenn man erwägt, daß die Summe ihrer ersten Glieder genau den Werth von $\Delta^2 y_n$ darstellt, welchen man aus der Gleichung (6) gewinnt, folgende Relation:

$$\Delta^2 y_n = \Delta^2 y_{n-2} + 2\Delta^3 y_{n-3} + 3\Delta^4 y_{n-4} + 4\Delta^5 y_{n-5} + \ldots \quad (7).$$

Nimmt man wieder die Differenz von dieser letztern Gleichung und verfährt gerade wie vorhin, so bekommt man:

$$\Delta^3 y_{n-1} = \Delta^3 y_{n-3} + 2\Delta^4 y_{n-4} + 3\Delta^5 y_{n-5} + 4\Delta^6 y_{n-6} + \text{ꝛc.}$$
$$\Delta^4 y_{n-2} = \qquad \Delta^4 y_{n-4} + 2\Delta^5 y_{n-5} + 3\Delta^6 y_{n-6} + \text{ꝛc.}$$
$$\Delta^5 y_{n-3} = \qquad\qquad \Delta^5 y_{n-5} + 2\Delta^6 y_{n-6} + \text{ꝛc. u s. w.}$$

Addirt man diese Gleichungen und bemerkt dabei, daß die Summe ihrer ersten Glieder den Werth $\Delta^3 y_n$ abgibt, welchen man aus der Gleichung (6) herleitet; so hat man:

$$\Delta^2 y_n = \Delta^3 y_{n-3} + 3\Delta^4 y_{n-4} + 6\Delta^5 y_{n-5} + 10\Delta^6 y_{n-6} + \text{ꝛc.} \quad (8).$$

Die numerischen Coefficienten der Gleichungen (6), (7) und (8) stimmen genau mit denen der Entwickelungen von:

$(1-a)^{-1}$, $(1-a)^{-2}$, $(1-a)^{-3}$ überein.

4. Eben so werden die Coefficienten des Ausdruckes von $\Delta^r y_n$ mit denen der Entwickelung von $(1-a)^{-r}$ gleichlautend sein und man wird haben:

$$\Delta^r y_n = \Delta^r y_{n-r} + r\Delta^{r+1} y_{n-r-1} + \frac{r(r+1)}{1\cdot 2}\Delta^{r+2} y_{n-r-2} + \text{ꝛc.} \quad (9).$$

Note VII zu §. 60.

Gebrauch der Interpolationsformeln bei der Quadratur der Curven.

1. Die Interpolationsformeln können mit Nutzen zur genäherten Bestimmung des Integrals $\int y dx$ oder der Quadratur der Curven gebraucht werden. Die erste Idee, die sich hier darbietet, besteht darin,

daß man für die in Frage stehende krumme Linie eine parabolische Curve substituirt und solche durch eine geringere oder größere Anzahl von Punkten der ersten Linie gehen läßt. Der Flächeninhalt dieser Parabel wird, wenn: $y'=\alpha+\beta x'+\gamma x'^2+$ ꝛc. die Gleichung derselben ist; durch:

$$\int y' dx' = \alpha x' + \frac{\beta x'^2}{2} + \frac{\gamma x'^3}{3} + \ldots + c$$

dargestellt, wobei die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ von den successiven Werthen der Ordinate y' abhängig sind und sich durch die Differenzen derselben ausdrücken lassen. Nimmt man zu diesem Behufe die Formel (F) des §. 52 und setzt darin $\frac{z}{h}=x'$; so verwandelt sich dieselbe in:

$$y'=y+x'\triangle y+\frac{x'(x'-1)}{1\cdot 2}\triangle^2 y+\frac{x'(x'-1)(x'-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\triangle^3 y + \text{ꝛc.},$$

in welche man so viel Glieder aufnehmen muß, als Punkte vorhanden sind, durch welche die parabolische Curve gehen soll. Unter der Annahme, daß die Anzahl drei sei, nimmt man nur drei Glieder auf; dergestalt ergibt sich in diesem Falle bei der vergleichenden Zusammenstellung:

$$\alpha=y,\ \beta=\triangle y-\tfrac{1}{2}\triangle^2 y,\ \gamma=\tfrac{1}{2}\triangle^2 y.$$

Die Coefficienten α, β, γ hängen demnach nur von den drei successiven Ordinaten ab, welche den Werthen:

$$z=0,\ z=h,\ z=2h \text{ oder } z=0,\ z=1,\ z=2$$

entsprechen. Zwischen den Grenzen 0 und 2 hätte man hiernach:

$$\int y' dx = 2y+2(\triangle y-\tfrac{1}{2}\triangle^2 y)+\tfrac{4}{3}\triangle^2 y=2(y+\triangle y+\tfrac{1}{6}\triangle^2 y) \quad \ldots (1)$$

und y' wäre die Ordinate einer Parabel QR (Fig. 16), welche durch drei Punkte M, M', M'' der Linie DE geht und $\int y' dx$ der Inhalt des zwischen der ersten Ordinate PM und der dritten P'', M'' liegenden Abschnitts jener Parabel. Im Allgemeinen wird unsere Parabel QR bald außerhalb, bald innerhalb der krummen Linie DE liegen, so daß der Inhalt ihres Abschnittes das einemal den entsprechenden Abschnitt jener Curve übertrifft, das anderemal von demselben übertroffen wird. Auf solche Weise kann in dem Endresultat eine mehr oder minder genaue Ausgleichung dieser Unterschiede bewerkstelligt werden.

2. Substituirt man in der Formel (1) für die Differenzen $\triangle y$ und $\triangle^2 y$ ihre Werthe y_1-y und y_2-2y_1+y; so findet man nach der Reduktion:

$$\int z dx = \tfrac{1}{3}(y+4y_1+y_2).$$

Indem man sich durch die Punkte M, M_3, M_4 eine neue Parabel gelegt denkt und dies so weiter fortsetzt, alsdann die Segmente vereinigt, kann man jeden beliebigen Flächenraum der Curve umfassen. Wird die letzte Ordinate durch y_m, wo m eine gerade Zahl ist, dargestellt; so hat man für die Summe dieser Flächenstücke den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{3}(y+4y_1+y_2)+\tfrac{1}{3}(y_2+4y_3+y_4)\ldots+\tfrac{1}{3}(y_{m-2}+4y_{m-1}+y_m)$$
$$=\tfrac{1}{3}(y+y_m)+\tfrac{2}{3}(y_2+y_4+\cdots+y_{m-2})+\tfrac{4}{3}(y_1+y_3+\ldots+y_{m-1})\ldots(2),$$

ein ziemlich elegantes Resultat, welches, da es nur Linien enthält, die man an der Figur zu messen vermag, zur Berechnung der Flächenräume, die von Linien begrenzt werden, deren Gleichung man nicht kennt, mit Vortheil gebraucht werden kann. Uebrigens wird man bei der Anwendung dieser Methode die zwischen zwei besondern Punkten liegenden Räume besonders berechnen, und überhaupt die Intervalle der Ordinaten in dem Maße enger zusammenziehen müssen, je höher der verlangte Grad von Genauigkeit ist.

3. Legen wir, wie La Place in dem 2ten Bande des 9ten Buches seiner: »Mécanique céleste« gethan, die Formel (A) des §. 45 zu Grunde, nämlich:

$$y_x = y_0+x\triangle y_0+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\triangle^2 y_0 + \text{etc.};$$

so haben wir, wenn dieselbe mit dx multiplicirt und von $x=0$ bis $x=1$ integrirt wird:

$$\int y_x\,dx=y_0+\frac{1}{2}\triangle y_0-\frac{1}{12}\triangle^2 y_0+\frac{1}{24}\triangle^3 y_0-\frac{19}{720}\triangle^4 y_0+\frac{3}{160}\triangle^5 y_0$$
$$-\frac{863}{60480}\triangle^6 y_0 + \text{etc.}$$

Für das erste zwischen y_0 und y_1 liegende Flächenstück. Ebenso wird:

$$\int y_x\,dx=y_1+\tfrac{1}{2}\triangle y_1-\tfrac{1}{12}\triangle^2 y_1 + \text{etc.},$$

das zwischen y_1 und y_2 liegende Flächenstück ausdrücken; u. s. w. Hieraus ergibt sich für das zwischen den Ordinaten y_0 und y_n befindliche Flächenstück oder die Summe von n Flächenstücken folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned} Syxdx=&y_0+y_1+y_2 \;.\;.\;.\;.\;.\;. +y_{n-1}\\ &+\tfrac{1}{2}(\triangle y_0+\triangle y_1+\triangle y_2 \;.\;.\;.\;.\;. +\triangle y_{n-1})\\ &-\tfrac{1}{12}(\triangle^2 y_0+\triangle^2 y_1+\triangle^2 y_2 \;.\;.\;.\;, +\triangle^2 y_{n-1}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

Nun ist aber nach der Formel (1) in der Note 5:

$$y_n - y_0=\triangle y_0+y_1+\ldots\triangle y_{n-1};\ \text{desgleichen}$$
$$\triangle y_n - \triangle y_0=\triangle^2 y_0+\triangle^2 y_1+\ldots+\triangle^2 y_{n-1}\ \text{u. s. w.}$$

Indem man diese Werthe in den vorhergehenden Ausdruck substituirt, erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\int y_x\, dx = & \tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots y_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_n \\ & - \tfrac{1}{12}(\triangle y_n - \Delta y_0) + \tfrac{1}{24}(\Delta^2 y_n - \triangle^2 y_0) \\ & - \tfrac{19}{720}(\Delta^3 y_n - \Delta^3 y_0) + \tfrac{3}{160}(\triangle^4 y_n - \Delta^4 y_0) \\ & - \text{rc.},\end{aligned}\right\} \ldots (3).$$

eine ziemlich einfache Formel, in welcher jedoch mehr als n Ordinaten gebraucht werden, da $\triangle y_n$, $\triangle^2 y_n \ldots$ von y_{n+1}, y_{n+2} abhängig sind.

4. Zur Beseitigung dieses Mißstandes berechnet man mittelst der Formel (9) in der Note (5) die Werthe Δy_n, $\Delta^2 y_n$, $\Delta^3 y_n \ldots$ und substituirt dann dieselben in die Formel (3), welche dadurch folgende Form erhält:

$$\left.\begin{aligned}\int y_x\, dx = & \tfrac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2} y_n \\ & - \tfrac{1}{12}(\triangle y_{n-1} - \Delta y_0) - \tfrac{1}{24}(\triangle^2 y_{n-2} + \triangle^2 y_0) \\ & - \tfrac{19}{720}(\Delta^3 y_{n-3} - \triangle^5 y_0) - \tfrac{3}{160}(\triangle^4{}_{n-4} + \Delta^4 y_0) \\ & - \text{rc.}\end{aligned}\right\} (4).$$

Note VIII zu §. 90.

Reihen für die Tangente und Cosecante.

Nachdem wir für die Cotangente eine Reihe, worin die Bernoulli'schen Zahlen vorkommen, aufgefunden, wollen wir auch die Tangente und Cosecante in Form solcher Reihen darzustellen versuchen.

1. Aus der bekannten Relation $\tang 2x = \frac{2 \tang x}{1 - \tang^2 x}$ entspringt:

$$\cot 2x = \frac{1}{2 \tang x} - \frac{\tang x}{2};\ \text{hieraus}\ \tang x = \cot x - 2 \cot 2x.$$

Nun ist aber:

$$\cot \frac{x}{2} = 2\left(\frac{1}{x} - \frac{B_1 \cdot x}{1 \cdot 2} - \frac{B_3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{B_5 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \ldots\right),$$

oder, wenn 2x für x gesetzt wird:

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1 x}{1 \cdot 2} - \frac{2^4 B_3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2^6 B_5 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \text{rc};\ \text{desgleichen:}$$

$$2 \cot 2x = \frac{1}{x} - \frac{2^4 B_1 x}{1 \cdot 2} - \frac{2^8 B_3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{2^{12} B_5 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} - \text{rc}.$$

Durch Subtraction dieser beiden Reihen ergibt sich:

$$\text{tang}\,x = \frac{2^2(2^2-1)B_1x}{1\cdot2} + \frac{2^4(2^4-1)B_3x^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \frac{2^6(2^6-1)B_5x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \text{etc.}$$

2. Die oben erwähnte Relation:

$$\cot x = \text{tang}\,x + 2\cot 2x = \frac{1}{\cot x} + 2\cot 2x \text{ liefert:}$$

$$\cot^2 x - 2\cot 2x \cdot \cot x = 1.$$

Daraus ergibt sich, wenn man diese Gleichung in Bezug auf $\cot x$ auflöst:

$$\cot x = \cot 2x + \text{cosec}\cdot 2x;\ \text{mithin } \text{cosec}\,x = \cot\tfrac{1}{2}x - \cot x,$$

wenn x für $2x$ gesetzt wird.

Wir haben aber:

$$\cot\tfrac{1}{2}x = \frac{2}{x} - \frac{2B_1x}{1\cdot2} - \frac{2B_3x^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \text{etc., und}$$

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2B_1x}{1\cdot2} - \frac{2^4B_3x^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \text{etc.}$$

Indem man die zweite Reihe von der ersten abzieht, findet man:

$$\text{cosec}\,x = \frac{1}{x} + \frac{2(2-1)B_1x}{1\cdot2} + \frac{2(2^3-1)B_3x^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

$$+ \frac{2(2^5-1)B_5x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \text{etc.}$$

Note IX zu §. 90.

Reihe für die Secante.

1. Es ist $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ und

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \text{etc.};$$

also:

$$\sec x = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \text{etc.}}$$

$$= 1 + \frac{B_2x^2}{1\cdot2} + \frac{B_4x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} + \text{etc.}\quad (1).$$

Es handelt sich nun darum, da nur gerade Potenzen von x vorkommen können, die Coefficienten B_2, B_4, B_6 ... zu bestimmen. Um dahin zu gelangen, verfahren wir nach Euler auf folgende Art.

Wir setzen in den zwei in der Note XI der „höhern Algebra“ aufgeführten Formeln πx für x, wodurch wir erhalten:

$$\sin\pi x = \pi x\left(\frac{1-x}{1}\right)\left(\frac{1+x}{1}\right)\left(\frac{2-x}{2}\right)\left(\frac{2+x}{2}\right)\left(\frac{3-x}{3}\right)\left(\frac{3+x}{3}\right)\ldots,$$

$$\cos\pi x = \left(\frac{1-2x}{1}\right)\left(\frac{1+2x}{1}\right)\left(\frac{3-2x}{3}\right)\left(\frac{3+2x}{3}\right)\left(\frac{5-2x}{5}\right)\left(\frac{5+2x}{5}\right)\ldots.$$

Geht man zu den Logarithmen über, so kommt:

$$\log\sin\pi x = \lg\pi x + \lg(1-x) + \lg(1+x) + \lg\left(\frac{2-x}{2}\right) + \lg\left(\frac{2+x}{2}\right) + \ldots;$$

$$\log\cos\pi x = \log(1-2x) + \log(1+2x) + \log\left(\frac{3-2x}{3}\right) + \lg\left(\frac{3+2x}{3}\right) + \ldots;$$

woraus durch Differentiation entsteht:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} - \frac{1}{3-x} + \frac{1}{3+x}\ldots;$$

$$\frac{\pi\sin\pi x}{2\cos\pi x} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3-2x} - \frac{1}{3+2x} + \frac{1}{5-2x} - \frac{1}{5+2x}\ldots.$$

Schreibt man in der letzten Gleichung $\frac{1}{2}x$ für x, so hat man:

$$\frac{\pi\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x} = \frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos\pi x)}} = \frac{2}{1-x} - \frac{2}{1+x} + \frac{2}{3-x} - \frac{2}{3+x} + \frac{2}{5-x}\ldots.$$

Indem man diese Reihe zu der Reihe für $\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x}$ addirt, findet man:

$$\frac{\pi\cos\pi x}{\sin\pi x} + \frac{\pi\sqrt{(1-\cos\pi x)}}{\sqrt{(1+\cos\pi x)}} = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} + \frac{1}{3-x} - \frac{1}{3+x} - \frac{1}{4-x} + \ldots$$

Macht man $x = \frac{m}{n}$, so wird:

$$\frac{\pi}{n\sin\frac{m}{n}\pi} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m}$$

$$- \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m}\ldots;$$

und für $\frac{m}{n}\pi = \frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{n}$, also $\sin\frac{m\pi}{n} = \cos\frac{k\pi}{n}$ wird:

$$\frac{\pi}{n\cos\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{n-2k} + \frac{2}{n+2k} - \frac{2}{3n-2k} - \frac{2}{3n+2k} + \frac{2}{5n-2k} + \frac{2}{5n+2k} \cdots;$$

ferner, wenn $\frac{k\pi}{n} = x$ gesetzt wird:

$$\frac{\pi}{2n\cos x} = \frac{\pi}{n\pi - 2nx} + \frac{\pi}{n\pi+2nx} - \frac{\pi}{3n\pi-2nx} - \frac{\pi}{3n\pi+2nx} \cdots;$$

Folglich:

$$\sec x = \frac{2}{\pi-2x} + \frac{2}{\pi+2x} - \frac{2}{3\pi-2x} - \frac{2}{3\pi+2x} + \frac{2}{5\pi-2x} + \frac{2}{5\pi+2x} \cdots$$

oder, wenn man je zwei Glieder in eine Summe vereinigt:

$$\sec x = \frac{4\pi}{\pi^2-4x^2} - \frac{4\cdot 3\pi}{9\pi^2-4x^2} + \frac{4\cdot 5\pi}{25\pi^2-4x^2} - \frac{4\cdot 7\pi}{49\pi^2-4x^2} + \cdots$$

Wird jedes Glied des zweiten Theils in eine Reihe verwandelt, so findet man:

$$\begin{aligned} \sec x = & \frac{2^2}{\pi}\left\{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right\} \\ & + \frac{2^4x^2}{\pi^3}\left\{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots\right\} \\ & + \frac{2^6x^4}{\pi^5}\left\{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{7}{7^5} + \cdots\right\} \\ & \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ & + \frac{2^{2n+2}x^{2n}}{\pi^{2n+1}}\left\{-1\ \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \cdots\right\} \\ & + \text{rc.} \end{aligned}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit (1), so ergeben sich zur Bestimmung der Coefficienten B_2, B_4 . . . folgende Relationen:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots &= \frac{\pi}{2^2}; \\ 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots &= \frac{\pi^3}{1\cdot 2}\cdot\frac{B_2}{2^4}; \\ 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \cdots &= \frac{\pi^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{B_4}{2^6}; \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad & \cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \cdots &= \frac{\pi^{2n+1}}{1\cdot 2 \ldots 2n}\cdot\frac{B_{2n}}{2^{2n+2}} \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

2. Die Zahlen 1, B_2, B_4, B_6 . . . , welche Secantencoefficienten genannt werden, lassen sich auch mit Hülfe der Bernoulli'schen Zahlen berechnen. Setzt man zu diesem Behufe in die Gleichung:

$$\sec x = \sin x \tang x + \cos x$$

für die trigonometrischen Linien die ihnen entsprechenden Reihen, nämlich:

$$\sec x = 1 + \frac{B_2 x^2}{1 \cdot 2} + \frac{B_4 x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ꝛc.},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} - \text{ꝛc.}$$

$$\tang x = \frac{2^2(2^2-1)B_1 x}{1 \cdot 2} + \frac{2^4(2^4-1)B_3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{2^6(2^6-1)B_5 x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots$$
$$+ \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n-1}\, x^{2n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; 2n} + \text{ꝛc.},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{ꝛc.};$$

so ergeben sich bei der vergleichenden Zusammenstellung folgende Relationen:

$$B_2 = 2^2(2^2-1) \cdot B_1 \; . \; . \; . \; -1;$$

$$B_4 = 2^4(2^4-1)B_3 \; . \; . \; . \; -2^2(2^2-1)B_1 \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 3} + 1 \text{ ꝛc.};$$

$$B_6 = 2^6(2^6-1)B_5 \; . \; . \; . \; -2^4(2^4-1)B_3 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 3} + 2^2(2^2-1) \cdot B_1 \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - 1;$$

. . . .

$$B_{2n} = 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n-1} - 2^{2n-2}(2^{2n-2}-1)B_{2n-3} \cdot \frac{2n(2n-1)}{2 \cdot 3} + \dots$$
$$+ (-1)^{n-1} 2^2(2^2-1) \frac{2n(2n-1) \; . \; . \; . \; 3 B_1 + (-1)^n}{2 \cdot 3 \; . \; . \; . \; . \; (2n-1)} \; . \; . \; . \; (3).$$

Mittelst dieser Formel kann der $n$te Coefficient der Secantenreihe aus den $n-1$ vorhergehenden Bernoulli'schen Zahlen B_{2n-1}, $B_{2n-3} \dots B_1$ berechnet werden.

Auf diese Art findet man:

$B_2 = 1$; $B_4 = 5$; $B_6 = 61$; $B_8 = 1385$;
$B_{10} = 50521$; $B_{12} = 2702765$; $B_{14} = 199360981$ u. s. w.

3. Es lassen sich auch umgekehrt die Bernoulli'schen Zahlen aus den Secantencoefficienten ableiten. Denn setzt man in der Gleichung:

$$\tang x = \sin x \sec x$$

für die trigonometrischen Linien die ihnen entsprechenden Reihen, nämlich:

$$\tan x = \frac{2^2(2^2-1)B_1 x}{1\cdot 2} + \frac{2^4(2^4-1)B_3 x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots 2^{2n}(2^{2n}-1)B_{2n-1}x^{2n-1} + \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{ꝛc.}, \quad \sec x = 1 + \frac{B_2 x^2}{1\cdot 2} + \frac{B_4 x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ꝛc.}:$$

so ergeben sich nachstehende Relationen:

$$\frac{2^2(2^2-1)}{2}B_1 = 1; \quad \frac{2^4(2^4-1)}{4}B_3 = 3B_2 - 1;$$

$$\frac{2^6(2^6-1)}{6}B_5 = 5B_4 - \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}B_2 + 1; \quad \frac{2^8(2^8-1)}{8}B_7 = 7B_6$$

$$- \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}B_4 + \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}B_2 - 1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n}B_{2n-1} = (2n-1)B_{2n-2} - \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3}B_{2n-4}\ldots$$

$$+ (-1)^{n-2}\frac{(2n-1)(2n-2)\ldots 3}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n-3)}B_2 + (-1)^{n-1} \quad \ldots (4).$$

Diese Formel setzt uns in den Stand, die Bernoulli'sche Zahl B_{2n-1} mittelst der n berechneten Secantencoefficienten zu bestimmen.

4. Das Vorhergehende ist hinreichend, um uns die gegenseitige Beziehung, in welcher die Bernoulli'schen Zahlen und die Secantencoefficienten zu einander stehen, kennen zu lernen, und daß man gar nicht nöthig hat, beide Arten von Zahlengrößen, wie hier und dort geschehen, von einander zu trennen und als Theile verschiedenartiger Reihen zu betrachten. Die Gleichung:

$$\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}x\right) = \sec x + \tan x = 1 + \frac{2(2^2-1)}{1\cdot 2}B_1 x + \frac{B_2 x^2}{1\cdot 2}$$

$$+ \frac{2^4(2^4-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}B_3 x^3 + \frac{B_4 x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ꝛc.},$$

zeigt uns vielmehr, daß die Bernoulli'schen Zahlen und Secantencoefficienten gleichzeitig die Coefficienten der nach den Potenzen von x entwickelten Funktion von $\tan(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x)$ sind, so daß die Coefficienten der ungeraden Potenzen von x die Bernoulli'schen Zahlen, jene der geraden Potenzen hingegen die Secantencoefficienten bestimmen werden. Ueber die Entwickelung der in Frage stehenden Funktion verweisen wir den Leser auf die im vierten Bande von „Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik“ mitgetheilte interessante Abhandlung von Scherk, „über einen allgemeinen, die Bernoulli'schen Zahlen und die Coefficienten der Secantenreihe zugleich darstellenden Ausdruck.“

Note X zu §. 93.

Ausdruck für die Summe der reciproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen und Beziehung dieser Summen zu den Bernoulli'schen Zahlen.

1. Wir haben einerseits:

$$\sin u = u - \frac{u^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{u^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \text{ꝛc}, \text{ und } \cos u = 1 - \frac{u^2}{1\cdot 2} + \frac{u^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \text{ꝛc} \ldots (1);$$

und andererseits:

$$\left.\begin{array}{l} \sin u = u\left(1-\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{2^2\cdot\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{3^2\cdot\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{4^2\cdot\pi^2}\right)\ldots \\ \text{und } \cos u = \left(1-\frac{4u^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{3^2\cdot\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{5^2\cdot\pi^2}\right)\left(1-\frac{4u^2}{7^2\cdot\pi^2}\right)\ldots \end{array}\right\} (2).$$

Die Formeln (1) gelten aber auch für ein imaginäres $u = vi$, wo $i = \sqrt{-1}$ gesetzt ist, wenn man:

$$\cos vi = \frac{\varepsilon^v + \varepsilon^{-v}}{2} \text{ und } \sin vi = \frac{\varepsilon^v - \varepsilon^{-v}}{2}\, i \text{ nimmt.}$$

Es müssen daher die Formeln (2) auch für $u = vi$ richtig bleiben. Man erhält dann:

$$\frac{\varepsilon^v - \varepsilon^{-v}}{2} = \frac{v}{1} + \frac{v^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{v^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \text{ꝛc.}$$

$$= v\left(1+\frac{v^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{2^2\cdot\pi^2}\right)\left(1+\frac{v^2}{3^2\cdot\pi^2}\right)\ldots (3),$$

$$\frac{\varepsilon^v + \varepsilon^{-v}}{2} = 1 + \frac{v^2}{1\cdot 2} + \frac{v^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1+\frac{4v^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4v^2}{3^2\cdot\pi^2}\right)\left(1+\frac{4v^2}{5^2\cdot\pi^2}\right)\ldots (4).$$

Macht man nun in der Formel (3) $v^2 = \pi^2 z$, und in der Formel (4) $v^2 = \frac{\pi^2 z}{4}$; so gehen sie in folgende über:

$$1 + \frac{\pi^2 z}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\pi^4 z^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \frac{\pi^6 z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{ꝛc.}$$

$$= (1+z)(1+\tfrac{1}{4}z)(1+\tfrac{1}{9}z)(1+\tfrac{1}{16}z)\ldots (5).$$

$$1 + \frac{\pi^2 z}{1\cdot 2\cdot 4} + \frac{\pi^4 z^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 4^2} + \frac{\pi^6 z^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 4^3} + \text{ꝛc.}$$

$$= (1+z)(1+\tfrac{1}{9}z)(1+\tfrac{1}{25}z)(1+\tfrac{1}{49}z)\ldots (6).$$

2. Hat man aber ein Produkt von der Form:

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)\;.\;.\;.\;,$$

welches offenbar in einer Reihe von der Form:

$$A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{etc.},$$

entwickelt werden kann, und setzt man:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\;.\;.\;.=S\alpha,\; \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\;.\;.\;.=S\alpha^2,$$
$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\;.\;.\;.=S\alpha^3 \text{ u. s. w.};$$

so hat man, wenn zu den Logarithmen übergegangen und differentiirt wird:

$$\frac{B+2Cz+3Dz^2+4Ez^3+\text{etc.}}{A+Bz+Cz^2+Dz^3+Ez^4+\text{etc.}}=\frac{\alpha}{1+\alpha z}+\frac{\beta}{1+\beta z}+\frac{\gamma}{1+\gamma z}+\text{etc.}$$
$$=\alpha-\alpha^2z+\alpha^3z^2-\alpha^4z^4+\text{etc.},$$
$$+\beta-\beta^2z+\beta^3z^2-\beta^4z^4+\text{etc.},$$
$$+\gamma-\gamma^2z+\gamma^3z^2-\gamma^4z^4+\text{etc.},$$
$$+\delta-\delta^2z+\delta^3z^2-\delta^4z^4+\text{etc.},$$
$$+\text{etc.},$$
$$=S\alpha-zS\alpha^2+z^2S\alpha^3-z^3S\alpha^4+\text{etc.},$$ folglich:

$$B+2Cz+3Dz^2+4Ez^3+\text{etc.}$$
$$=(A+Bz+Cz^2+Dz^3+\text{etc.})(S\alpha-zS\alpha^2+z^2S\alpha^3-z^3S\alpha^4+\text{etc.};$$

woraus, weil offenbar $A=1$ ist:

$$B-S\alpha=0;\; 2C-BS\alpha+S\alpha^2=0;$$
$$3D-CS\alpha+BS\alpha^2-S\alpha^3=0;$$
$$4E-DS\alpha+CS\alpha^2-BS\alpha^3+S\alpha^4=0;$$
$$5F-ES\alpha+DS\alpha^2-CS\alpha^3+BS\alpha^4-S\alpha^5=0; \text{ u. s. w.}$$

3. Wenden wir nun diese Formeln auf die Gleichung (5) an, so bekommen wir, wenn die Summen der reciproken geraden Potenzen der Zahlen bezüglich durch S_2, S_4, S_6, S_8 . . . dargestellt werden, nachstehende Relationen:

$$S_2-\frac{\pi^2}{1\cdot2\cdot3}=0;\; S_4-\frac{\pi^2}{1\cdot2\cdot3}S_2+\frac{2\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=0;$$

$$S_6-\frac{\pi^2}{1\cdot2\cdot3}S_4+\frac{\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}S_2-\frac{3\pi^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}=0;$$

$$S_8-\frac{\pi^2}{1\cdot2\cdot3}S_6+\frac{\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}S_4-\frac{\pi^6}{1\cdot2\ldots7}S_2+\frac{4\pi^8}{1\cdot2\ldots9}=0;$$

$$S_{10}-\frac{\pi^2}{1\cdot2\cdot3}S_8+\frac{\pi^4}{1\cdot2\ldots5}S_6-\frac{\pi^6}{1\cdot2\ldots7}S_4+\frac{\pi^8}{1\cdot2\ldots9}S_2-\frac{5\pi^{10}}{1\cdot2\ldots11}=0;$$

u. s. w.

Man findet daraus:

$$S_2=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\text{ꝛc.}=\frac{\pi^2}{6};$$

$$S_4=1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\text{ꝛc.}=\frac{\pi^4}{90};$$

$$S_6=1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\text{ꝛc.}=\frac{\pi^6}{945};$$

$$S_8=1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\text{ꝛc.}=\frac{\pi^8}{9450};$$

$$S_{10}=1+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{9^5}+\text{ꝛc.}=\frac{\pi^{10}}{93555};\ \text{u. s. w.},$$

so daß die Summe der Reihe:

$$S_{2m}=1+\frac{1}{2^{2m}}+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{4^{2m}}+\text{ꝛc.}$$

durch die Ludolp'sche Zahl ausgedrückt wird.

4. Indem wir mit der Gleichung (6) dieselbe Rechnung vornehmen und dabei die Summe der reciproken geraden Potenzen der ungeraden Zahlen bezüglich durch S'_2, S'_4, S'_6 . . . darstellen, finden wir folgende Relationen:

$$S'_2=1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\text{ꝛc.}=\frac{\pi^2}{2^3};$$

$$S'_4=1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\text{ꝛc.}=\frac{2}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{\pi^4}{2^5};$$

$$S'_6=1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\text{ꝛc.}=\frac{16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{\pi^6}{2^7};$$

$$S'_8=1+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{25^4}+\text{ꝛc.}=\frac{272}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}\cdot\frac{\pi^8}{2^9}$$

u. s. f., wonach die Summe:

$$S'_{2m}=1+\frac{1}{3^{2m}}+\frac{1}{5^{2m}}+\frac{1}{7^{2m}}+\text{ꝛc.}$$

ebenfalls durch die Ludolp'sche Zahl ausgedrückt wird.

5. Es ist offenbar:

$$\frac{\varepsilon^x+\varepsilon^{-y}}{2}=\varepsilon^{\frac{x-y}{2}}\frac{\left(\varepsilon^{\frac{x+y}{2}}+\varepsilon^{-\frac{x+y}{2}}\right)}{2};$$

mithin, wenn man die Formel (4) zu Hülfe nimmt:

$$\frac{\varepsilon^x+\varepsilon^{-y}}{2}=\varepsilon^{\frac{x-y}{2}}\left(1+\frac{(x+y)^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{25\pi^2}\right)\ldots$$

Macht man in diesem Resultat $y=0$, so bekommt man:

$$\frac{\varepsilon^x+1}{2}=\varepsilon^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\ldots.$$

Durch Division der beiden letzten Ausdrücke ergibt sich:

$$\frac{\varepsilon^x+\varepsilon^{-y}}{\varepsilon^x+1}=\frac{\varepsilon^{\frac{x-y}{2}}\left(1+\frac{(x+y)^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{25\pi^2}\right)\ldots.}{\varepsilon^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{25\pi^2}\right)\ldots}\text{ oder:}$$

$$\frac{\varepsilon^{x+\frac{y}{2}}+\varepsilon^{-\frac{y}{2}}}{\varepsilon^x+1}=\left(1+\frac{2xy+y^2}{\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{9\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2xy+y^2}{25\pi^2+x^2}\right)\ldots.$$

Nun sieht man aber bald, daß:

$$\frac{\varepsilon^{x+\frac{y}{2}}+\varepsilon^{-\frac{y}{2}}}{\varepsilon^x+1}=\frac{\left(1+\varepsilon^{-x}\right)\left(\varepsilon^{-\frac{y}{2}}+\varepsilon^x\,\varepsilon^{\frac{y}{2}}\right)}{(1+\varepsilon^{-x})(1+\varepsilon^x)}=\frac{\varepsilon^{-\frac{y}{2}}+\varepsilon^{\frac{y}{2}}+\varepsilon^{-x-\frac{y}{2}}+\varepsilon^{x+\frac{y}{2}}}{2+\varepsilon^x+\varepsilon^{-x}}\text{ ist;}$$

woraus, wenn $x=u\sqrt{-1}$ und $y=-2v\sqrt{-1}$ gesetzt wird, sich ergibt:

$$\frac{\cos v+\cos(u-v)}{1+\cos u}=\cos v+\frac{\sin u\sin v}{1+\cos u}=\cos v+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u\sin v.$$

Man erhält demnach:

$$\cos v+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u\sin v=\left(1+\frac{4uv-4v^2}{\pi^2-u^2}\right)\left(1+\frac{4uv-4v^2}{9\pi^2-u^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{4uv-4v^2}{25\pi^2-u^2}\right)\ldots,$$

$$=\left(1+\frac{2v}{\pi-u}\right)\left(1-\frac{2v}{\pi+u}\right)\left(1+\frac{2v}{3\pi-u}\right)\left(1-\frac{2v}{3\pi+u}\right)\ldots.$$

Setzen wir in dem letzten Ausdrucke $\frac{m\pi}{n}$ statt u und $\frac{z\pi}{2n}$ statt v, und entwickeln dann die Funktionen von z, nämlich $\cos\frac{z\pi}{2n}$ und $\sin\frac{z\pi}{2n}$ in Reihen nach den Potenzen von z; so finden wir:

$$1+\frac{\pi z}{2n}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}-\frac{\pi^2 z^2}{2\cdot4n^2}-\frac{\pi^3z^3}{2\cdot4\cdot6n^3}\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}+\frac{\pi^4z^4}{2\cdot4\cdot6\cdot8n^4}+\text{ꝛc.}$$

$$=\left(1+\frac{z}{n-m}\right)\left(1-\frac{z}{n+m}\right)\left(1+\frac{z}{3n-m}\right)\left(1-\frac{z}{3n+m}\right)\ldots;$$

woraus sich die Summen der Reihen:

$$P_1=\frac{1}{n-m}-\frac{1}{n+m}+\frac{1}{3n-m}-\frac{1}{3n+m}+\text{ꝛc.}$$

$$P_2 = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \text{rc. u. s. w.}$$

ableiten lassen, von denen die erste unmittelbar gibt:

$$\frac{\pi}{2n}\tang\frac{m\pi}{2n} = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \text{rc.} \ldots (7).$$

6. Es ist ferner:

$$\frac{\varepsilon^x - \varepsilon^{-y}}{2} = \varepsilon^{\frac{x-y}{2}} \frac{\left(\varepsilon^{\frac{x+y}{2}} - \varepsilon^{-\frac{x+y}{2}}\right)}{2};$$

woraus, wenn die Formel (3) benutzt wird:

$$\frac{\varepsilon^x - \varepsilon^{-y}}{2} = \varepsilon^{\frac{x-y}{2}}\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{4\pi^2}\right)$$
$$\left(1+\frac{(x+y)^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{36\pi^2}\right)\ldots$$

Macht man in dieser Formel $y=0$, so kommt:

$$\frac{\varepsilon^x - 1}{2} = \varepsilon^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi}\right)\left(1+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\ldots$$

Durch Division der beiden letzten Ausdrücke ergibt sich:

$$\frac{\varepsilon^x - \varepsilon^{-y}}{\varepsilon^x - 1} = \frac{\varepsilon^{\frac{x-y}{2}}(x+y)\left(1+\frac{(x+y)^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{(x+y)^2}{36\pi^2}\right)\ldots,}{\varepsilon^{\frac{1}{2}x}\, x\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{36\pi^2}\right)\ldots;}$$

oder:
$$\frac{\varepsilon^{x+\frac{y}{2}} - \varepsilon^{-\frac{y}{2}}}{\varepsilon^x - 1} = \left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{2yx+y^2}{4\pi^2+x^2}\right)$$
$$\left(1+\frac{2yx+y^2}{16\pi^2+x^2}\right)\left(1+\frac{2yx+y^2}{36\pi^2+x^2}\right)\ldots$$

Nun ist aber:

$$\frac{\varepsilon^{x+\frac{y}{2}} - \varepsilon^{-\frac{y}{2}}}{\varepsilon^x - 1} = \frac{\left(\varepsilon^{x+\frac{y}{2}} - \varepsilon^{-\frac{y}{2}}\right)}{(\varepsilon^x - 1)}\frac{(1-\varepsilon^{-x})}{(1-\varepsilon^{-x})} =$$
$$= \frac{\varepsilon^{x+\frac{y}{2}} + \varepsilon^{-x-\frac{y}{2}} - \varepsilon^{\frac{y}{2}} - \varepsilon^{\frac{-y}{2}}}{2-\varepsilon^x - \varepsilon^{-x}}.$$

Macht man wieder $x=u\sqrt{-1}$ und $y=-2v\sqrt{-1}$; so ergibt sich daraus:

$$\frac{\cos v - \cos(u-v)}{1-\cos u} = \cos v - \frac{\sin u \sin v}{1-\cos u} = \cos v - \cot\frac{u}{2}\sin v$$

$$=\left[1-\frac{2v}{u}\right]\left[1+\frac{4uv-4v^2}{4\pi^2-u^2}\right]\left[1+\frac{4uv-4v^2}{16\pi^2-u^2}\right]\ldots$$

$$=\left[1-\frac{2v}{u}\right]\left[1+\frac{2v}{2\pi-u}\right]\left[1-\frac{2v}{2\pi+u}\right]$$

$$\left[1+\frac{2v}{4\pi-u}\right]\left[1-\frac{2v}{4\pi+u}\right]\ldots.$$

Aendert man in diesem Ausdrucke v in $-\frac{z\pi}{2n}$ und u in $\frac{m\pi}{n}$ um, und entwickelt die Funktion $\frac{\cos \pi z}{2n}+\cot\frac{m\pi}{2n}\sin\frac{\pi z}{2n}$ in eine Reihe nach den Potenzen von z; so findet man:

$$1+\frac{\pi z}{2n}\cot\frac{m\pi}{2n}-\frac{\pi^2 z^2}{2\cdot 4n^2}-\frac{\pi^3 z^3}{2\cdot 4\cdot 6n^3}\cot\frac{m\pi}{2n}+\frac{\pi^4 z^4}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8^4 n}+ \text{etc.}$$

$$=\left[1+\frac{z}{m}\right]\left[1-\frac{z}{2n-m}\right]\left[1+\frac{z}{2n+m}\right]$$

$$\left[1-\frac{z}{4n-m}\right]\left[1+\frac{z}{4n+m}\right]\ldots.,$$

woraus sich die Summen:

$$Q_1=\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}+\text{etc.},$$

$$Q_2=\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(2n-m)^2}+\frac{1}{(2n+m)^2}+\frac{1}{(4n-m)^2}+\frac{1}{(4n+m)^2}+\text{etc.}$$

u. s. w. bestimmen lassen, von denen die erste gibt:

$$\frac{\pi}{2n}\cot\frac{m\pi}{2n}=\frac{1}{m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}+\text{etc}\ldots. \quad (8).$$

Indem man die Gleichung (7) von der Gleichung (8) abzieht, erhält man, wenn man erwägt, daß:

$$\frac{\pi}{2n}\left[\cot\frac{m\pi}{2n}-\tan\frac{m\pi}{2n}\right]=\frac{\pi}{n\tan\frac{m\pi}{n}}=\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}$$ ist:

$$\frac{\pi}{n}\cot\frac{m\pi}{n}-\frac{1}{m}=-\frac{1}{n-m}+\frac{1}{n+m}-\frac{1}{2n-m}+\frac{1}{2n-m}$$

$$-\frac{1}{3n-m}+\frac{1}{3n+m}-\frac{1}{4n-m}+\frac{1}{4n+m}-\text{etc.}$$

Vereinigt man in dem zweiten Theile je zwei Glieder in eine Summe, so hat man, wenn durchgehends die Zeichen geändert werden:

$$\frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2mn}\cot\frac{m\pi}{n} = \frac{1}{n^2-m^2} + \frac{1}{4n^2-m^2}$$

$$+ \frac{1}{9n^2-m^2} + \frac{1}{16n^2-m^2} + \text{2c.} \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

7. Setzt man in dem zweiten Theil der Formel (9) $n=1$, und entwickelt jedes Glied in eine Reihe nach den Potenzen von m; so hat man, wenn die Summen der reciproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen wieder durch S_2, S_4, S_6 . . . dargestellt werden:

$$\frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2m}\cot m\pi = S_2 + m^2S_4 + m^4S_6 + \text{2c.} \quad (10).$$

Der in §. 90 für die Cotangente aufgestellten Formel zufolge ist aber:

$$\frac{1}{2m^2} - \frac{\pi}{2m}\cot\pi = \frac{2B_1\pi^2}{2} + \frac{2^3m^2\pi^4B_3}{2\cdot3\cdot4} + \frac{2^5m^4\pi^6B_5}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \text{2c.}$$

Aus der Vergleichung dieser Reihe mit der Reihe (10) ergibt sich dann:

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \text{2c.} = \frac{2\pi^2\cdot B_1}{1\cdot2};$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{2c.} = \frac{2^3\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot B_3;$$

$$S_6 = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{2c.} = \frac{2^5\pi^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} B_5;$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{2c.} = \frac{2^7\pi^8}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} B_7; \text{ u. s. w.}$$

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \text{2c.} = \frac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{1\cdot2\ldots(2n)} B_{2n-1} \quad . \quad . \quad . \quad (11).$$

8. Da $\frac{1}{2^{2n}}\cdot S_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}}$ ist; so hat man auch:

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{B_1}{1\cdot2};$$

$$\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{2}\cdot\frac{B_3}{1\cdot2\cdot3\cdot4};$$

$$\frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{2}\cdot\frac{B_5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}; \text{ u. s. w.}$$

$$\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \ldots = \frac{\pi^{2n}}{2}\cdot\frac{B_{2n-1}}{1\cdot2\ldots(2n)} \quad . \quad . \quad . \quad (12).$$

Aus $S_{2n}=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+$ ꝛc. und:

$$S''_{2n}=\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{8^{2n}}+\text{ꝛc. folgt:}$$

$$S_{2n}-S''_{2n}=1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\ldots=S_{2n},$$

oder, wenn für S_{2n} und S''_{2n} ihre Werthe aus (11) und (12) substituirt werden:

$$S'_{2n}=\frac{B_{2n}-1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(2n)}\cdot\frac{\pi^{2n}(2^{2n}-1)}{2}.\ \text{Also:}$$

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{(2^2-1)}{1\cdot2}B_1;$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(2^4-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}B_3;$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots=\frac{\pi^6}{2}\cdot\frac{(2^6-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}B^5;\ \text{u. s. w.}$$

$$1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\ldots=\frac{\pi^{2n}}{2}\cdot\frac{(2^{2n}-1)}{1\cdot2\ldots(2n)}\cdot B_{2n}-1\ldots(13).$$

Zieht man von der Reihe

$$S_{2n}=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\ldots\ \text{die Reihe:}$$

$$\frac{2S_{2n}}{2^{2n}}=\frac{2}{2^{2n}}+\frac{2}{4^{2n}}+\frac{2}{6^{2n}}+\text{ꝛc. ab; so hat man:}$$

$$\frac{(2^{2n-1}-1)}{2^{2n-1}}S_{2n}=1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}-\frac{1}{6^{2n}}+\text{ꝛc.}$$

Hiernach wird:

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\text{ꝛc.}=\frac{(2-1)\pi^2}{1\cdot2}B_1;$$

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\text{ꝛc.}=\frac{(2^3-1)\pi^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}B_3;$$

$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\text{ꝛc.}=\frac{(2^5-1)\pi^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}B_5;\ \text{u. s. w.}$$

$$1-\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}-\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}-\frac{1}{6^{2n}}+\text{ꝛc.}$$

$$=\frac{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(2n)}B_{2n-1}\ldots(14).$$

Wer sich über die in diesen und den beiden vorhergehenden Noten behandelten Gegenstände ausführlicher belehren will, den verweisen wir auf folgende Werke:

1. Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen. 1. Band.
2. Euler's Anleitung zur Differentialrechnung. 2. Theil.
3. Mathematische Abhandlungen von Grunert. Altona, bei Friedrich Hammerich. 1822.
4. Mathematische Abhandlungen v. Scherk. Berlin, bei Reimer. 1825.
5. Traité du calcul différential et du calcul intégral, par Lacroix. Tome troisième.

Note XI.

Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen und Secantencoefficienten.

Das in den vorhergehenden Noten über die Bernoulli'schen Zahlen und die Secantencoefficienten Mitgetheilte enthält weder eine Relation zwischen den Bernoulli'schen Zahlen unter sich noch eine solche Beziehung zwischen den Secantencoefficienten. Die Aufsuchung derartiger Relationsscalen sei daher unsere Aufgabe in dieser Note.

1. Um die in Frage stehende Recursionsformel für die Bernoulli'schen Zahlen zu gewinnen, nehmen wir die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2}\sin x = \frac{1+\cos x}{2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} = \frac{1}{x} - \frac{B_1 x}{1\cdot 2} - \frac{B_3 x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{B_5 x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \text{etc.};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{x^7}{1\cdot 2\ldots 7} + \text{etc};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\ldots 6} + \text{etc.}$$

Indem wir für die trigonometrischen Linien diese Reihen in obenstehende Gleichung einführen, haben wir:

$$1 - \left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{B_1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\right\}x^2 - \left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{B_1}{1\cdot 2} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right\}x^4$$
$$- \left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{B_5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{B_3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{B_1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}\right\}x^6$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$-x^{2n}\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{B_{2n-1}}{1\cdot2\ldots(2n)}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{B_{2n-3}}{1\cdot2\ldots(2n-2)}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{B_{2n-5}}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n-4)}\text{ ꝛc. }+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{1\cdot2\ldots(2n+4)}\right\}-\text{ ꝛc.}$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{6n}}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\text{ ꝛc.}$$

$$+(-1)^n\,\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{2n}}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n)}.$$

Die Gleichstellung der Coefficienten von x^{2n} gibt uns, wenn man die Glieder, worin die Bernoulli'schen Zahlen vorkommen, allein auf einer Seite stehen läßt und das Ganze mit —1 multiplicirt:

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{B_{2n-1}}{1\cdot2\ldots(2n)}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{B_{2n-3}}{1\cdot2\ldots(2n-2)}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\,\frac{B_{2n-5}}{1\cdot2\ldots(2n-4)}-\text{ ꝛc.}$$

$$=(-1)^{n+1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n)}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3\ldots(2n+1)}\right\}.$$

Indem man beiderseits mit $1\cdot2\cdot3\ldots(2n+1)$ multiplicirt, erhält man, nach vorgenommener Reduction, für die Bernoulli'schen folgende Recursionsformel:

$$\left.\begin{aligned}&(2n+1)B_{2n-1}-\frac{[2n+1)2n(2n-1)}{1\cdot2\cdot3}\,B_{2n-3}\\&+\frac{(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\,B_{2n-5}-\text{ ꝛc.}\\&\qquad=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n-1}{2}.-\end{aligned}\right\}\quad(1).$$

Diese Formel läßt sich mit Vortheil zur successiven Berechnung der Bernoulli'schen Zahlen gebrauchen.

2. Um eine ähnliche Relationsscala für die Secantencoefficienten zu erhalten, setzen wir in der Gleichung:

$$\sec x\cos x=1$$

für die trigonometrischen Linien die ihnen entsprechenden Reihen, nämlich:

$$1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\frac{x^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\text{ ꝛc. für }\cos x\text{ und:}$$

$$1+\frac{B_2x^2}{1\cdot2}+\frac{B_4x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{B_6x6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\text{ für }\sec x.$$

Führt man die darin angedeutete Multiplication aus und ordnet das Ganze nach Potenzen von x, so entsteht:

$$\left(\frac{B_2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}\right)x^2+\left(\frac{B_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right)x^4$$

$$+\left(\frac{B_6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}-\frac{B_4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{B_2}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right)x^6$$

$$+ \text{ꝛc}$$

$$+\left(\frac{B_{2n}}{1\cdot 2\ldots(2n)}-\frac{B_{2n-2}}{1\cdot 2\ldots(2n-2)}\cdot\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{B_{2n-4}}{1\cdot 2\ldots(2n-4)}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\right.$$

$$\left.+ \text{ꝛc} \ldots +(-1)^n\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n)}\right)x^{2n}$$

$$+ \text{ꝛc.} = 0,$$

so daß jeder einzelne Coefficient für sich verschwinden muß. Indem wir den Coefficienten von x^{2n} mit $1\cdot 2\cdot 3\ldots(2n)$ multipliciren, liefert uns derselbe zur Berechnung der Secantencoefficienten folgende brauchbare Formel:

$$B_{2n}-\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}B_{2n-2}+\frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}B_{2n-4}+\text{ꝛc.}$$
$$+(-1)^n=0 \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Ueber anderweitige Recursionsformeln für die Bernoulli'schen Zahlen und die Secantencoefficienten verweisen wir auf die beiden Abhandlungen von Dr. Schlömilch in dem „Archiv der Mathematik und Physik, herausgegeben von Grunert", erster und dritter Theil; ferner auf die im 26. Bande des „Crelle'schen Journals für reine und angewandte Mathematik", von Dr. Stern mitgetheilte Notiz über die Coefficienten der Secantenreihe.

Note XII zu §. 106.

Von den Differenzengleichungen, in denen die Differenz der unabhängigen Veränderlichen nicht mehr constant ist.

1. In der Differenzenrechnung nimmt man größtentheils die Differenz der unabhänglichen Veränderliche $=1$ an, und reducirt die Fälle, in welchen diese Differenz von der Einheit abweicht, auf solche, wo jener Umstand stattfindet. — Handelt es sich z. B. darum, die Funktion φx von der Beschaffenheit zu finden, daß, wenn successiv fx und Fx statt x gesetzt wird, man

$$\varphi(Fx)=P_x\,\varphi(fx)+Q_x$$

erhalte, wo fx, Fx, P_x, Q_x gegebene Funktionen von x darstellen; so setzt La Place $fx=u_z$, $Fx=u_{z+1}$, wo u_z eine unbekannte Funktion der Veränderliche z ist. Da fx bekannt ist, so kann man die Glei-

chung $fx = u_z$ in Bezug auf x auflösen und den daraus abgeleiteten Werth $x = {}_1f(u_z)$ in die Gleichung $Fx = u_{z+1}$ substituiren, wodurch dieselbe in $u_{z+1} = F[f_1(u_z)]$ übergeht.

Läßt sich nun diese Gleichung integriren, so hat man u_z in eine Funktion von z ausgedrückt, wonach auch x in Funktion von z darge- stellt werden kann. Die Funktionen $\varphi(Fx)$ und $\varphi(fx)$ verwandeln sich beziehungsweise in $\varphi(u_{z+1})$ und $\varphi(u_z)$. Indem man dieselben durch y_{z+1} und y_z darstellt, ergibt sich eine Gleichung von der Form:

$$y_{z+1} = P_z y_z + Q_z,$$

wo die Differenz der unabhängigen Veränderliche z der Einheit gleich ist. Nach der Bestimmung von y_z führt man den Werth von z in x ein, um dadurch zu dem Ausdruck von $\varphi(fx)$ zu gelangen, welcher auf jener von φx zurückgeführt wird, wenn man fx mit x vertauscht

2. Um dies Verfahren durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die Gleichung:

$$\varphi(x) = \varphi(2x) + 2$$

nehmen. Indem wir $u_z = x$, $u_{z+1} = 2x$ setzen, haben wir $u_{z+1} = 2u_z$. Hieraus folgt $u_z = C \cdot 2^z = x$. (Siehe §. 96). Machen wir hierauf $\varphi x = y_z$ und $\varphi(2x) = y_{z+1}$, so ergibt sich die Differenzengleichung: $y_{z+1} = y^2_z - 2$. Setzen wir zuvörderst $y_1 = a + \frac{1}{a}$; so finden wir:

$$y_2 = a^2 + \frac{1}{a^2};\quad y_3 = a^4 + \frac{1}{a^4};\quad y^4 = a^8 + \frac{1}{a^8}; \ldots y_z = a^{2^{z-1}} + \frac{1}{a^{2^{z-1}}},$$

wovon der letzte Ausdruck das vollständige Integral ist.

Die Gleichung $c \cdot 2^z = x$ gibt nun $2^{z-1} = \frac{x}{2c}$, folglich:

$$y_z = \varphi x = a^{\frac{x}{2c}} + a^{-\frac{x}{2c}},$$ welches Resultat in

$$\varphi x = b^x + b^{-x}$$

übergeht, wenn $b = a^{\frac{1}{2c}}$ gesetzt wird.

Im §. 28 sprachen wir den Wunsch aus, daß es Herrn Strauch gefallen möge, seine Aufgaben zur Variationsrechnung in einem für sich bestehenden Werke erscheinen zu lassen. Daß dieser Wunsch jetzt schon in Erfüllung gegangen ist, glauben wir nachträglich bemerken zu müssen.

4.
K
5.
B
C'
A
C
6.
B
D
A
C
A'
C'
D
M'''
G
H
G
H'
G'
H'''
G'''
10.
N
D
M
C
L
B
N'
D'
M'
C'
L'
B'
D''
C''
B''
V
T
S
Z
P''' x
A
P
A'
P'
A''
A'''
M'
M''
E
O
R
x
16.
P'
P''
B
15.
14
R
N
M
I
M
P
C
P'
T'
A
A
P
R
x
Q
M'

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Francoeur, Louis Benjamin,

Vollständiger Lehrkurs der reinen Mathematik

Bd.: 2,4

Bern [u.a.] 1846

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.2887(2,1/4
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11111657-3